

ANALES DE LA SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA



DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

JULIO 1941 — ENTREGA I — TOMO CXXXII

SUMARIO

	Pág.
CLARO CORNELIO DASSEN. — A propósito de un informe académico.....	3
GUILLERMO ROHMEDEK. — Fenómenos de desecación en el Bolsón de Fiam- balá	22
ELENA BERJMAN. — Una solución de ajustamiento, etc.	34

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145

1941

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
 Dr. Mario Isola †
 Dr. Germán Burmeister †
 Dr. Benjamin A. Gould †
 Dr. R. A. Phillippi †
 Dr. Guillermo Rawson †
 Dr. Carlos Berg †
 Dr. Valentín Balbín †
 Dr. Florentino Ameghino †

Dr. Carlos Darwin †
 Dr. César Lombroso †
 Ing. Luis A. Huergo †
 Ing. Vicente Castro †
 Dr. Juan J. J. Kyle †
 Dr. Estandisao S. Zeballos †
 Ing. Santiago E. Barabino †
 Dr. Carlos Spegazzini †
 Dr. J. Mendizábal Tamborel †

Dr. Walter Nernst
 Dr. Alberto Einstein
 Dr. Cristóbal M. Hicken †
 Dr. Angel Gallardo †
 Dr. Eduardo L. Holmberg †
 Ing. Guillermo Marconi †
 Ing. Eduardo Huergo †
 Dr. Enrique Ferri †

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Aguilar; Ing. José Babini; Dr. Horacio Damjanovich; Dr. Claro C. Dassen;
 Prof. Carlos E. Dieulefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollan (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Alfredo Sordelli; Dr. Reinaldo Vanossi; Dr. Adolfo T. Williams; Dr. Enrique V. Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1941-1942)

<i>Presidente</i>	Ingeniero Jorge W. Dobranich
<i>Vicepresidente 1º</i>	Ingeniero Enrique Chanourdie
<i>Vicepresidente 2º</i>	Doctor Claro C. Dassen
<i>Secretario de actas</i>	Profesor José F. Molfino
<i>Secretario de correspondencia</i>	Ingeniero José S. Gandolfo
<i>Tesorero</i>	Ingeniero Edmundo Parodi
<i>Bibliotecario</i>	Doctor Reinaldo Vanossi
	Ingeniero Carlos A. Lizer y Trelles
	Ingeniero Antonio Paltoví
	Ingeniero Nicolás Besio Moreno
	Doctor Antonio Casacuberta
<i>Vocales</i>	Ingeniero Julio R. Castiñeiras
	Doctor Marcelino Herrera Vegas
	Doctor Jorge Magnin
	Doctor Juan Nielsen
	Doctor Juan C. Vignaux
	Doctor Lucio D'Ascoli
	Doctor Santo S. Faré
<i>Suplentes</i>	Ingeniero Carlos M. Gadda
	Doctor José Lluaró
	Ingeniero Benno J. Schnack
	Ingeniero Eduardo Volpatti
<i>Revisores de balances anuales</i>	Ingeniero Pablo E. Bordenave
	Doctor Jacobo Wainer

ADVERTENCIA.— Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA
ARGENTINA

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

TOMO CXXXII

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145

1941

A PROPÓSITO DE UN INFORME ACADÉMICO

POR

CLARO CORNELIO DASSEN

Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas,

Miembro titular

de la

Academia Nacional de Ciencias Exactas, etc., de Buenos Aires,

Profesor honorario de la Universidad de Buenos Aires,

etc.

Résumé. — Une information de l'auteur relative à une soi-disant démonstration des deux théorèmes de Picard basée sur un théorème de Bloch, présentée par un candidat à l'Académie Nationale des Sciences de Buenos Aires, conclut à la non valeur de cette prétendue démonstration. Plusieurs mois après, une critique parue dans un journal, ayant abouti au même résultat, s'en attribue la paternité niant la validité des arguments qu'avaient donnés l'auteur et un collègue consulté par lui. On prouve dans le présent article, que le raisonnement de cette critique est exactement le même (quoique moins précis) que celui de l'auteur et de son collègue. A cet égard, l'auteur signale plusieurs défauts de la critique en question: D'abord, son ton de suffisance et de *magister dixit* non justifié; ensuite, d'avoir répété, en employant quelques fois les mêmes mots, ce que l'auteur et son collègue avaient déjà dit plusieurs mois avant. On ne doit, évidemment, ni s'approprier des arguments de ceux que l'on prétend critiquer, ni laisser percer une malveillance contre ces derniers, ni exploiter quelque erreur d'imprimerie, ou quel que lapsus calami, (surtout quand cela ne peut passer inaperçu au lecteur compétent), pour satisfaire des animosités personnelles.

I

Según lo expliqué en el número de enero p.pdo. de estos *Anales* (págs. 4 y siguientes), a mediados del año 1940 me tocó expedir un informe técnico sobre un trabajo titulado *Una demostración de los dos célebres teoremas de Picard*, que había sido publicado en el n.º de abril de 1940 de aquéllos (págs. 145 a 152), y luego llevado a la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires en apoyo de la candidatura de su autor para miembro titular de ese Cuerpo. Un examen de dicho trabajo me trajo la impresión de que no demostraba lo que se proponía, y como era el

único que podía tomarse en consideración, resolví consultar el punto con un colega especializado en Análisis Superior, particularmente en Teoría de Funciones. El Dr. Carlos Biggeri cumple esa condición porque, aparte de otros méritos, en su estada en París, durante el período universitario 1937-1938, en uso de una beca otorgada por la Comisión Nacional de Cultura, se perfeccionó en dicha Teoría, al lado de los grandes maestros Borel, Montel, Denjoy y Valirón ⁽¹⁾. A él me dirigí pues, y confirmó la invalidez del trabajo. A mi pedido, el 27 de agosto de 1940, el Dr. Biggeri me remitió una carta, donde analizó a fondo el trabajo en cuestión, poniendo en relieve la falla capital del mismo, así como diversos temas afines, concretando sus puntos de vista y las objeciones arribadas ⁽²⁾. Hechos posteriores me pusieron en el caso de publicar esa carta, y como era extensa, urgido por exigencias del momento ⁽³⁾ debí fraccionar la publicación: la primera parte apareció en BOLETÍN MATEMÁTICO (Año XIII, n.º del 15 de noviembre de 1940, págs. 256-259), con el título de *A propósito de una demostración del segundo teorema de Picard*; la segunda parte es la publicada en estos ANALES DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA (tomo CXXXI, enero de 1941, págs. 4-15; cuya tirada aparte se distribuyó en los primeros días de enero de 1941), con el título de *Segundo teorema de Picard*. Por su parte, Biggeri publicó en BOLETÍN MATEMÁTICO (Año XIII, n.º del 15 de diciembre de 1940, págs. 291-294) una nota titulada *Sobre el segundo teorema de Picard*, un resumen de la cual me había comunicado su autor en la referida carta del 27 de agosto de 1940, (véase ANALES DE LA S. C. A., *Ibid*, pág. 14, líneas 6-20). Para abreviar el lenguaje, de aquí en adelante, cuando diga « primera parte de la carta » me referiré a la nota de BOLETÍN MATEMÁTICO del 15 de noviembre de 1940; cuando diga « segunda parte de la carta » se entenderá el artículo de los ANALES de enero de 1941, así como la nota del Dr. Biggeri de BOLETÍN MATEMÁTICO del 15 de diciembre de 1940; y cuando diga « el candidato », se tratará del enton-

⁽¹⁾ Varios de los teoremas del Dr. Biggeri han sido generalizados; y otros han sido citados por diversos matemáticos: Valiron (París), Gontcharoff (Moscú), Dvoretzky (Jerusalém), von Stachó (Budapest).

⁽²⁾ Quizá convenga hacer notar, desde ya, que algunos rodeos de lenguaje de la carta tenfan por objeto no herir susceptibilidades.

⁽³⁾ Oportunamente, y para deslindar responsabilidades, pienso publicar, por mi cuenta, una noticia algo detallada de este asunto y de su trámite en la Academia. Véase también la nota ⁽³⁾ de la pág. 5.

ces candidato a académico autor del trabajo respecto del cual había consultado al Dr. Biggeri.

La primera parte de la carta encara una afirmación del candidato, quien, creyendo haber demostrado los dos teoremas de Picard « con el solo uso de las nociones básicas » (¿?) « de la teoría de funciones analíticas », deseaba realizar una obra útil poniéndola al alcance de los « jóvenes estudiosos », anunciando que, en obsequio a ellos, expondría su presunta demostración « con más detalles de los imprescindibles ». Pero si, por un lado, y con esa excusa, se detuvo largamente en cosas triviales en exceso ⁽¹⁾, por otra, dió por evidente, en manifiesto contraste, la siguiente proposición: « Pero, en virtud de la definición de ésta, el punto $z_0 = \infty$ no puede ser polo de $g(z)$ » (pág. 151, líneas 11-12). Tal afirmación dista mucho de poder considerarse evidente en un trabajo de índole didáctica, por cuya causa tenía el candidato obligación de detenerse en ella, o, por lo menos, de enunciar o citar explícitamente alguna propiedad bien conocida de la que pudiera fácilmente deducirse aquélla; y eso en obsequio a « los jóvenes estudiosos » a quienes deseaba instruir ⁽²⁾.

El Dr. Biggeri, al considerar esta cuestión en la primera parte de su carta, no se limitó a mencionar algún teorema del cual podía considerarse corolario la proposición dada como evidente por el candidato. Se explayó accediendo a mi deseo de publicar tarde o temprano ⁽³⁾, en provecho de esos mismos « jóvenes estudiosos »,

(1) La mayoría de ellas están indicadas en el informe técnico que presenté a la Academia, de cuyo informe se distribuyeron varias copias.

(2) Y esta obligación se hacía más ineludible, si se tiene en cuenta que existen tratados, precisamente muy concisos, que, al referirse a este punto, se detienen bastante. Así, Gastón Julia, en su libro titulado *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*, París, 1923, al considerar el caso en que es uniforme una cierta función que interviene en la demostración dada por el mismo Picard de su segundo teorema, dedica algunas líneas a una propiedad de análoga naturaleza que la afirmación del candidato. La propiedad considerada por G. Julia es también un corolario del teorema general demostrado en la primera parte de la carta.

(3) Sucedió que, dos meses después de esto, recibí una carta, rociada de chuletas, invectivas y bravatas (características éstas, por lo general, de aquéllos que, por no asistírles la verdad científica, tratan de lograr sus fines mediante arbitrarías apreciaciones de carácter personal), donde, entre otras cosas sorprendentes, su autor, patrocinante del candidato, expresa que mis « malos y muy ilustrados consejeros » (¿?) no habían podido encontrar la demostración dada como evidente por el candidato, agregando que él (patrocinante), no me la transmitía ¡« para que esos malos consejeros » (¿?) « sigan sufriendo las penurias consiguientes »! Para su propio prestigio, perdió el patrocinante en cuestión una magnífica oportu-

para quienes el candidato declara haber escrito su artículo, la demostración omitida por éste. Pero en ningún momento se atribuyó Biggeri la paternidad del teorema que demostró con método original; y así resulta de su manifestación en la segunda parte de la carta (pág. 14, líneas 3-5); dice allí, efectivamente, en términos precisos: « puesto que, en realidad, este teorema ⁽¹⁾ (cuyo enunciado acabamos de repetir) es un corolario de propiedades fundamentales de las funciones analíticas ».

De paso hago observar que lo recién expuesto explica la razón de ser y el alcance de la siguiente frase mía: « ... al final, se sentaba una afirmación que, de no demostrarla, *dada la índole didáctica del trabajo*, resultaba insuficiente la demostración deseada », (*Boletín*, n.º del 15 de noviembre de 1940, pág. 256). Adviértese que, de esa frase, no se desprende que si el candidato hubiese demostrado tal afirmación, quedaba valedera su supuesta demostración del segundo teorema de Picard, porque en la segunda parte de la carta, que es coetánea, naturalmente, con la primera parte de la misma, esa invalidez está contundentemente probada, y hago esta última observación porque el 5 de mayo de 1941, o sea casi seis meses después de la publicación de la carta, apareció el n.º 2 del Vol. VII de la *Revista de la Unión Matemática Argentina*, (U. M. A.), que contiene una noticia bibliográfica sin firma, donde se dice textualmente: « El único *lapsus* que han descubierto en la memoria antes reseñada el Dr. Biggeri y el académico firmante, no existe; y huelgan por tanto las ocho páginas impresas que le dedican; en cambio no parecen haber notado la falla capital que inutiliza el trabajo y deja intacto el tema abordado » ⁽²⁾.

tunidad de guardar silencio: su carta lleva fecha 4 de noviembre de 1940, y la de Biggeri, conteniendo la demostración que dicho patrocinante no me quería transmitir (posiblemente por ignorarla), es del 27 de agosto de 1940; y así provocó la *inmediata* publicación del fragmento de la carta de Biggeri. El 15 de noviembre de 1940 vió la luz, como ya hemos dicho, el n.º de *Boletín Matemático* conteniendo la parte pertinente al caso.

(¹) El teorema demostrado en la primera parte de la carta.

(²) La memoria antes reseñada a que se refiere esta noticia, es la del candidato.

Las supuestas ocho páginas impresas, son solamente cuatro escasas, (véase *Boletín* del 15 de noviembre de 1940).

Por otra parte, obsérvese que el autor de esa misma noticia bibliográfica, al referirse al trabajo del candidato, reclama alguna justificación de la frase « es también regular o polo de primer orden, como no es difícil verlo, para la función $g(z)$ ». Si dicho autor cree justa su reclamación, *con mucha mayor razón* debió ver que

Quienquiera sea el autor de algunas de las bibliografías sin firma aparecidas en esa *Revista de la U. M. A.*, ha revelado en ellas una modalidad de temperamento que le impulsa a dar a sus críticas un sabor agrio, ya de animosidad o de malquerencia, que no siempre puede atribuirse a desmañas en la redacción. Sea lo que fuere a ese respecto, no lo imitaré, contentándome, como es mi deber, con restablecer, sin pasión, las cosas en su lugar ⁽¹⁾. Por ejemplo, la « falla capital » del trabajo del candidato está señalada por nosotros hasta con exceso de insistencia en la segunda parte de la carta del 27 de agosto de 1940, coetánea, repito, con la primera parte de la misma, a pesar de que su publicación, debido a la causa apuntada más arriba (pág. 4), es posterior en algo más de un mes a esta última, pero siempre anterior en unos cinco meses a la aparición de la crítica de la *Revista de la U. M. A.* Y ese señalamiento del Dr. Biggeri fué recalcado por éste casi treinta veces. Con tal insistencia, dicho señalamiento no ha podido pasar desapercibido ni para el lector menos atento.

Personalmente me bastaría lo expuesto, pero en obsequio al Dr. Biggeri y a quienes deseen mayores detalles o explicaciones, analizaré el comentario de la referida crítica de la *Revista de la U. M. A.* Dividiré el análisis en dos partes, en la primera de las cuales me ocuparé del asunto fundamental (el problema de la uniformización); en la segunda, analizaré tal comentario párrafo por párrafo, limitándome, repito, y en lo posible, a lo puramente científico con exclusión de cualquier otra apreciación que no tenga ese carácter. Para abreviar, cuando diga « la crítica » me referiré a la que trae la mencionada *Revista de la Unión Matemática Argentina* (nº 2, Vol. VII, págs. 62-64).

era obligación ineludible del candidato, detenerse en la proposición que se deduce del teorema general demostrado en la primera parte de la carta. Por propia declaración de la crítica resulta, pues, que faltaba alguna justificación, y eso es exactamente lo que, con más claridad, dijimos nosotros sin haber clasificado esa falta como *lapsus*.

En el presente trabajo se demuestra detalladamente que, en la noticia bibliográfica que nos ocupa, hay una parte apropiada al Dr. Biggeri (hasta a veces con las mismas palabras); y que, lo restante, no tiene ningún valor científico.

⁽¹⁾ Repetimos que, cuando se está asistido por la verdad científica, huelgan las frases literarias — con sabor a lugares comunes — empleadas en estas críticas, frases destinadas a desfigurar las cosas y a sorprender la buena fé de los no versados en las cuestiones que se desarrollan en los trabajos criticados.

II (a)

En el trabajo del candidato aparece la función:

$$g(z) = \lg [\varphi(z) + \sqrt{\varphi^2(z) - 1}]$$

que, en la carta del 27 de agosto de 1940, está designada por $h(z)$.

El candidato afirma que $g(z)$ es uniforme (pág. 148, líneas 10-13). Pero su argumentación sólo prueba que $g(z)$ es uniforme en un recinto simplemente conexo, exterior al círculo unidad, que no contenga el punto $z_0 = \infty$, y así lo hace observar el Dr. Biggeri en la segunda parte de la carta (pág. 8, líneas 17-19), sin personificar al candidato. Admitir, como lo hace implícitamente éste, que de tal argumentación surge la uniformidad de $g(z)$ en todo el exterior del círculo-unidad, constituye el hecho que frustra su trabajo ⁽¹⁾.

El Dr. Biggeri ha dicho hasta veinte y siete (27) veces, por lo menos, en su carta, que la uniformización de la función $g(z)$ constituye el punto capital en la demostración del segundo teorema de Picard si se desea aplicar los métodos de Bloch y Montel.

La misma crítica lo reconoce, y sus palabras textuales son las siguientes (pág. 64, líneas 1-4): « Después de mucho insistir ⁽²⁾ sobre este punto capital, (hasta seis veces lo hace en el texto, con letra bastardilla para mejor destacarlo) le dedica nada menos que siete largas notas desde págs. 12 a 15 ». Confronte el lector esta confesión de la crítica con el párrafo de la misma crítica que he transcrita más arriba (final de la pág. 6).

Sorprende en alto grado, pues, que la crítica salga diciendo que: « el Dr. Biggeri y el académico firmante no parecen haber notado la falla capital que inutiliza el trabajo y deja intacto el tema abordado » ⁽³⁾. Téngase además en cuenta que las siete notas de la

⁽¹⁾ Más precisamente, la función $g(z)$ está deducida de la $F(z)$ que aparece en el trabajo del candidato, mediante la aplicación de logaritmos y raíces cuadradas, operaciones no uniformes. Siendo así, la argumentación del candidato no valdría, por ejemplo, para las funciones del tipo $F(z) = k_1(z) \cdot e^{k(z)}$ donde $k_1(z)$ y $k(z)$ son funciones uniformes con el punto del infinito singular esencial aislado. Para esta función $F(z)$ no se podría pues asegurar que la $g(z)$ es uniforme, sin un estudio previo (al cual el candidato ni alude, ni menciona y ni siquiera se da cuenta que es necesario, pues al respecto no dice ni una sola palabra). Luego, el candidato, no da tal demostración del segundo teorema de Picard.

⁽²⁾ Se refiere al Dr. Biggeri.

⁽³⁾ Este es uno de los tantos ejemplos que pueden citarse de cómo, en la crítica, salen desfiguradas las cosas.

segunda parte de la carta están (salvo algo de la nota 1ª), exclusivamente consagradas a insistir sobre el problema de tal uniformización, y que Biggeri resuelve dicho problema.

Precisaré algo más: los comentarios que hace la crítica al referirse al trabajo del candidato, en pág. 61, líneas 27-36, y que son los únicos, sobre la tantas veces mencionada falla fundamental, cotejados con lo que se expresa en la segunda parte de la carta, ponen en evidencia que el contenido de las líneas 27-32, es exactamente lo dicho con más precisión en la carta (en la nota 1ª de ésta, por ejemplo) (1); el contenido de las líneas 34-36 es repetición, casi con las mismas palabras, de lo manifestado en la carta (verbigracia en la penúltima y última líneas de la pág. 12, y en la primera línea de la pág. 13).

(1) He aquí lo que dijo el Dr. Biggeri (nota 1ª, pág. 12-13) en términos de gran precisión y claridad:

« Cuando, para demostrar el *segundo* teorema de Picard basándose en el teorema de Bloch, se introducen funciones $h(z)$ deducidas de la $f(z)$ mediante logaritimación (simple o reiterada), como ser las [4], [5], [6], [8] y [9], se presenta, (si se desea trasladar al *segundo* teorema, la demostración dada por Montel del *primer* teorema), un delicado problema de uniformización; a saber: si la función $f(z)$, uniforme y holomorfa en un entorno del punto singular esencial (aislado) z_0 , no toma ni el valor 0 ni el valor 1, ¿será posible, entonces, uniformizar la función $h(z)$ en un entorno de dicho punto? Precisamente, la ventaja de la demostración dada por Bloch del segundo teorema de Picard, utilizando la mayoración [7], reside en que, se ve *inmediatamente* que las funciones:

$$\frac{z^6 : f'(z)^6}{f^3(z) \cdot [f(z) - 1]^4}, \quad \text{y}, \quad \frac{z^6 \cdot f'(z)^6}{f^6(z) \cdot [f(z) - 1]^4},$$

son *uniformes* en un entorno de z_0 . [De la uniformidad, holomorfismo y acotación de estas dos últimas funciones, en el entorno de z_0 (inferidas de la uniformidad, del homorfismo de $f(z)$, de $f(z) \neq 0$, de $f(z) \neq 1$, en dicho entorno, y del teorema de Landau, expresado éste mediante la mayoración [7]), se deduce la regularidad del punto z_0 , para tales funciones, en virtud del teorema de Riemann (el cual es aplicable, precisamente, porque tales funciones, además de holomorfas y acotadas, son *uniformes* en un entorno de z_0). Y de la regularidad del punto z_0 , para dichas funciones, se deduce que z_0 es regular o polo para $f^2(z)$, lo que es un absurdo, pues z_0 es una singularidad esencial para $f(z)$]. Naturalmente que, tal problema de uniformización (de $h(z)$ en un entorno de z_0) no se presenta en la demostración del *primer* teorema de Picard, pues, si la función entera $f(z)$, cumple las condiciones: $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq 1$, las funciones $h(z)$, definidas por [4], [5], [6], [8] y [9] son enteras, (además de que, la solución afirmativa de tal problema de uniformización es, en este caso, *inmediata*, no tiene interés para la demostración, basada en el teorema de Bloch, del *primer* teorema de Picard, pues en esta demostración no se aplica ni el teorema de Riemann, ni el de Laurent, en z_0 : y, precisamente,

Resumiendo, pues: *la falla capital en cuestión, está señalada hasta con exceso de insistencia en la carta del Dr. Biggeri (27 de agosto de 1940), y todo el comentario de la crítica respecto de tal falla capital es repetición de lo dicho con antelación de varios meses, en la segunda*

para poder aplicar tales teoremas es por lo que hay que asegurarse, aparte de la holomorfia, la *uniformidad* de $h(z)$ en un entorno de z_0 ».

El problema de la uniformización *puede, también, presentarse*, aún si se introducen funciones deducidas de la $f(z)$ mediante algoritmos trascendentes superiores, por ejemplo, empleando la función inversa de la modular elíptica. Así, en la demostración que da Picard de su segundo teorema, se introduce la función:

$$G(z) = v[f(z)]$$

donde $t = v(z)$ es la función inversa de la función modular elíptica, $z = \lambda(t)$.

Si $f(z)$ es una función entera, con $f(z) \neq 0$, y , $f(z) \neq 1$, entonces, cualquiera de las infinitas ramas de $G(z)$ es *uniforme* (y, además, entera), de modo que, aquí, tampoco se presenta, en el caso del primer teorema; el problema de la uniformización. Pero si pasamos al segundo teorema no se puede, sin un estudio previo, que indudablemente es muy difícil de realizar, asegurar que, de las tres condiciones: el punto del infinito es singular esencial aislado para $f(z)$; para $|z| > R$, es $f(z) \neq 0$, y , $f(z) \neq 1$, se infiera que la función $G(z)$ sea uniformizable. En otros términos, en el caso del segundo teorema, desde el punto de vista de la uniformización, se presenta, para la función $G(z)$, una dificultad análoga a la que se presenta para las funciones $h(z)$ deducidas de la $f(z)$ mediante logaritmación (simple o reiterada). Sin atacar este serio problema, una de las propiedades fundamentales de la teoría de la función modular, permite desviarlo, utilizando la función $G(z)$. Dos determinaciones cualesquiera, $G_1(z)$, y , $G_2(z)$, de las infinitas determinaciones de la función $v[f(z)]$ están ligadas por una substitución del grupo modular (subgrupo del grupo fuchsiano). O sea:

$$(S) \quad G_1(z) = \frac{\alpha \cdot G_2(z) + \beta}{\gamma \cdot G_2(z) + \delta},$$

siendo:

$$\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma = 1,$$

y:

$$\alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv 1, \quad (\text{mód. } 2).$$

Si la substitución (S) es *idéntica*, entonces, $G(z)$ es *uniforme* (y, en este caso, la demostración del segundo teorema es casi análoga a la del primero). Si la substitución (S) es *hiperbólica* o *parabólica* (en el grupo modular no existen substituciones elípticas), su correspondiente forma canónica permite deducir (mediante exponenciales), funciones *uniformes* de $G(z)$. Y de tales funciones *uniformes* de $G(z)$ teniendo en cuenta que la parte imaginaria de la función inversa de la función modular elíptica es *siempre positiva* [tal función inversa efectúa la transformación conforme del plano z , desprovisto de los puntos 0, 1, ∞ , sobre el semiplano superior, $\mathcal{I}(t) > 0$, del plano $t = v(z)$], y que cuando $t = v(z) \rightarrow \infty$, permaneciendo en una faja paralela al eje imaginario, el punto z queda sobre

parte de la carta, con el agravante de que la crítica usa casi las mismas palabras y ofrece menos precisión ⁽¹⁾.

Pasando ahora a otro género de consideraciones, recordaré que el objeto primordial de la publicación de la carta del 27 de agosto de 1940, fué señalar, con la mayor altura posible, las deficiencias en general y en particular el hecho frustratorio del trabajo del candidato; y con este motivo, el Dr. Biggeri dió una demostración ⁽²⁾ del segundo teorema de Picard *con una hipótesis restrictiva explícitamente estipulada*, a saber: *$h(z)$ es uniforme en el entorno del punto $z_0 = \infty$* , (pág. 8, líneas 19-21, segunda parte de la carta).

Basta recordar lo que dice Biggeri en págs. 6 y 7 de esa segunda

un número finito de hojas de su superficie de Riemann y tiende hacia 0, se deduce el segundo teorema de Picard. Luego, pues, la sub-automorfia de la función modular es una de las propiedades que permite eludir el tantas veces mencionado problema de uniformización. Otra de las propiedades de la función modular que interviene de manera decisiva en la demostración original de Picard es, como dije más arriba, que la parte imaginaria de su función inversa es siempre positiva. Evidentemente, de las funciones deducidas de la $f(z)$ mediante logaritmación (simple o reiterada), se pueden deducir (linealmente) otras que posean una propiedad análoga a la última recordada para la función inversa de la modular. Por ejemplo, de la función $\alpha(z)$ introducida en pág. 293 (*Boletín Matemático*, año XIII), por Biggeri, se puede deducir sometiendo esta función a la transformación conforme, que representa el círculo de centro en el origen y radio igual a K , sobre el semiplano superior positivo de otra variable, designémosla por $\eta(z)$, (las funciones $\eta(z)$ y $\alpha(z)$ están ligadas linealmente), se puede deducir, digo, una función que goce de la propiedad de ser su parte imaginaria siempre positiva, es decir, una propiedad análoga a la de la función inversa de la modular elíptica. Pero la función deducida de la $\alpha(z)$ no es inversa de ninguna función automorfa (o sub-), y he aquí por qué para tales funciones $\alpha(z)$, (y lo mismo cabe decir de las otras deducidas de $f(z)$, mediante logaritmaciones), no es posible eludir el problema de la uniformización, resuelto por Biggeri, si se desea seguir las huellas de Picard, Bloch y Montel. Esto explica el profundo sentido de la frase del Dr. Biggeri, transcripta más arriba: « Cuando, para demostrar el *segundo* teorema de Picard basándose en el teorema de Bloch, se introducen funciones $h(z)$ deducidas de la $f(z)$ mediante logaritmación (simple o reiterada), como ser las [4], [5], [6], [8] y [9], se presenta, (si se desea trasladar al *segundo* teorema, la demostración dada por Montel del *primer* teorema), un delicado problema de uniformización ».

⁽¹⁾ La casi totalidad de los otros comentarios que trae la crítica referentes al trabajo del candidato — comentarios contenidos en la pág. 61, hasta la línea 26 — están hechos en el informe técnico que presenté a la Academia, del cual, como ya dije más arriba, en nota ⁽¹⁾, pág. 5, se distribuyeron varias copias.

⁽²⁾ Nótese que esa demostración ocupa solamente dos páginas y once líneas impresas (incluyendo el enunciado del teorema), a saber, desde línea 1, pág. 8, hasta línea 11, pág. 10, y no toda la segunda parte de la carta (doce páginas impresas), como dice la crítica.

parte de la carta del 27 de agosto de 1940, con claridad meridiana y ejemplar delicadeza hacia el candidato:

« puede conducirse la demostración de modo tal que la diferencia entre la demostración del primer teorema y la del segundo, estribé simplemente en un paso al límite (salvo, evidentemente, el mencionado problema de uniformización; pues la solución de tal problema es la *única* complicación que se presenta al demostrar el *segundo* teorema *correlativamente* a la forma en que Montel demostró el *primer* teorema, empleando el teorema de Bloch). . . . Para probar esto, le expondré, primeramente, la siguiente demostración del segundo teorema de Picard, en la cual imponemos a $h(z)$ una cierta hipótesis restrictiva (detallada más adelante), con el objeto de hacer extendible (es decir, para verificar, de manera lo más clara posible, que, salvo la uniformización de $h(z)$ en un entorno de z_0 , las demostraciones de los dos teoremas de Picard, empleando el teorema de Bloch, son casi análogas), al segundo teorema, la demostración, dada por Montel, del *primer* teorema. Esta demostración (salvo el problema de la *uniformización* de $h(z)$. . .) es del mismo tipo que las dadas por Bloch y Montel, y difiere de ellas en algunos detalles de exposición ».

Y en pág. 8, el Dr. Biggeri estipula explícitamente la hipótesis restrictiva, aludida más arriba, bajo la cual demuestra el segundo teorema de Picard, en los siguientes términos precisos, también de óptima claridad:

« Fijemos en [9] una determinación para cada una de las dos raíces cuadradas y una determinación para cada uno de los dos logaritmos, y consideremos la función *uniforme*, $h(z)$, que así resulta, en términos más precisos: $h(z)$ resulta, de tal modo, por de pronto, *uniforme* en cada recinto simplemente conexo, interior al $|z| > R$, que no contenga al punto $z_0 = \infty$. La hipótesis restrictiva, de la cual hablamos más arriba, es la siguiente: $h(z)$ es *uniforme* en el entorno del punto $z_0 = \infty$ ».

La demostración dada por Biggeri del segundo teorema de Picard en la hipótesis explícitamente estipulada, es absolutamente rigurosa. Nótese a este respecto que, en esta demostración, no se hace uso de la propiedad cuya demostración fué el objeto de la primera parte de la carta, pues Biggeri, además de demostrar que la derivada, $g'(z)$, de $g(z)$ es *regular* en el infinito, como lo hace el candidato, demostró que dicha derivada es *regular y nula* en el infinito. Resulta, pues, de los párrafos transcritos, que no se propuso Biggeri demostrar, por el momento, el segundo teorema en toda su generalidad, cosa que no era el objetivo de dicha carta. Y resulta también así extraño que la crítica le atribuya deseos de dar tal carácter de generalidad; sólo a quienes no leyesen o no entendieran el artículo de los *Anales*, podía el título que dí a este artículo traerles confusiones al respecto ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ La nota ⁽⁶⁾ de la carta tiene por objeto dar *por ahora* — ya que el objeto de dicha carta era otro — solo el enunciado de un teorema, debido a Biggeri, que resuelve el difícil problema de uniformización, (ver también pág. 21).

II (b)

Establecido lo anterior relativamente al asunto *uniformización*, completaré el examen de la parte estrictamente matemática de la crítica haciéndome cargo de algunas manifestaciones y objeciones de la misma que están fuera de lugar (véase nota ⁽¹⁾ de la pág. 7).

Del teorema demostrado por el Dr. Biggeri en la primera parte de la carta, o sea: « Si z_0 es un polo de la función analítica y uniforme $g(z)$, en un cierto entorno del punto z_0 , la función $g(z)$ toma todos los valores arbitrariamente prefijados de módulos suficientemente grandes », se deduce de inmediato, sin necesidad en absoluto de ninguna transformación, la afirmación del candidato, o sea « en virtud de la definición de ésta, el punto $z_0 = \infty$ no puede ser polo de $g(z)$ ». Es evidente que el teorema anterior puede enunciarse en otra forma equivalente, aplicando la transformación conforme definida por la

función $\frac{1}{z}$. Si se enunció el teorema en la forma recordada, fué para que surgiese inmediatamente de él, sin transformación alguna, la afirmación del candidato. Por otra parte, si nos limitamos al caso en que $g(z)$ es uniforme, del hecho que $z_0 = \infty$ es regular para su derivada, $g'(z)$, se infiere de inmediato que dicho punto $z_0 = \infty$ no puede jamás ser polo múltiple para $g(z)$, (para deducirlo basta tener presentes las tres elementalísimas propiedades siguientes: si k es una constante, una primitiva de k es $k.z$, una primitiva de $\frac{k}{z}$ es $k.\log z$, el $\log z$ no es uniforme en el entorno de $z_0 = \infty$) ⁽¹⁾, por lo tanto, si admitimos, por un momento, que la función $g(z)$, que aparece en el trabajo del candidato, es uniforme (descontando así la falla capital), la única posibilidad que le faltaba descartar al candidato era que el punto $z_0 = \infty$ fuese polo simple para $g(z)$, es decir que, desde el punto de vista de la afirmación del candidato, el único caso interesante ⁽²⁾ era el de polo simple; precisamente, por este mo-

⁽¹⁾ La crítica, al referirse al trabajo del candidato, reclama alguna justificación de la frase « es también regular o polo de primer orden, como no es difícil verlo, para la función $g(z)$ ». Lo dicho en el texto es la demostración más didáctica posible de tal afirmación. También puede demostrarse tal afirmación recordando que: si el punto del infinito es un polo de orden m para una función, $g(z)$, dicho punto es un polo de orden $m-1$ para su derivada, $g'(z)$.

⁽²⁾ Por ser tan fácil darse cuenta, como vimos, que, efectivamente, el único caso interesante era el de polo simple, no cabía sospechar la existencia de alguien que creyese lo contrario, o sea, que el caso de polo simple es trivial y que el caso de polo múltiple es el interesante.

tivo, Biggeri demostró el teorema enunciado en el introito de la primera parte de su carta, para el caso nada trivial de polo simple.

Además, recuérdese la ventaja de la demostración de Biggeri: mediante los desarrollos en serie que Biggeri utiliza, ella tiene carácter constructivo, como su autor lo hace notar en dos oportunidades; pues Biggeri da un método general para calcular el (los) punto (puntos) en el cual (en los cuales) $g(z)$ toma el valor α , siendo $|\alpha|$ suficientemente grande, basado en la inversión del desarrollo tayloriano, en el origen, $z' = 0$, de:

$$t(z') = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g\left(\frac{1}{z'}\right)}.$$

Por otra parte, como lo hace notar el mismo Biggeri, su demostración se extiende al caso de polo múltiple haciendo muy sencillas modificaciones ⁽¹⁾.

La crítica transcribe el siguiente párrafo de la primera nota del *Boletín*: « existen dos números positivos $\rho_3 \leq \rho_2$ y ρ_4 tales que, la función $t = t(z')$ establece entre los círculos $|z'| \leq \rho_3$ y $|t| \leq \rho_4$ una correspondencia biunívoca ». Respecto de esta transcripción debo manifestar que faltan en el texto del *Boletín* las palabras « el elemento holomorfo en el origen de inversa de » que llenan una línea en el original, y que por un descuido del copista, fué saltada en la copia de la primera parte de la carta original, enviada a la imprenta del *Boletín Matemático*; además, por la premura de la publicación (ver últimas líneas de la nota ⁽²⁾, pág. 5), esa línea no fué reincorporada al corregir las pruebas. De modo que el párrafo debe leerse así: « existen dos números positivos $\rho_3 \leq \rho_2$ y ρ_4 tales que, el elemento holomorfo en el origen de inversa de la función $t = t(z')$ establece entre los círculos $|z'| \leq \rho_3$ y $|t| \leq \rho_4$, una correspondencia biunívoca ».

Todo lector que haya entendido la clara y rigurosa demostración constructiva del teorema, dada en el referido *Boletín* advierte de inmediato que la correspondencia biunívoca entre los círculos $|z'| \leq \rho_3$ y $|t| \leq \rho_4$, es la establecida por el elemento holomorfo en el origen, $t = 0$, de la función inversa de $t(z')$, máxime si se tiene en cuenta que dicho elemento de la función inversa, $z' = z'(t)$, de la función

(1) El autor ha estimado innecesario detenerse a desarrollar tales modificaciones porque, por lo clásicas y sencillas, están al alcance de cualquier principiante en Teoría de Funciones. Véase también págs. 17 y 18.

$t = t(z')$, holomorfo en el origen, $t = 0$, es el aludido inmediatamente antes del párrafo transcripto, y que, como dice el Dr. Biggeri (últimas líneas, pág. 258), la determinación efectiva de r y R puede hacerse invirtiendo la serie que define la función $t(z')$.

De esta última observación se desprende que el mencionado descuido de un copista y la inadvertencia del autor al corregir las pruebas, no autorizan a nadie que se respete, en un caso como éste, para chancearse en la forma que lo hace la crítica anónima, exteriorizando así, como ya lo hemos observado, una muy poco estimable inquina personal ⁽¹⁾.

Resumimos todo lo dicho más arriba con las siguientes cinco observaciones, cada una de las cuales demuestra fehacientemente la absoluta inconsistencia de las correspondientes cinco observaciones que la crítica hace a la primera nota de *Boletín Matemático*:

III — RESUMEN

1º) El Dr. Biggeri no se atribuyó el teorema que figura en la primera parte de la carta y que demostró, detallada y rigurosamente, con método original constructivo.

(1) Cabe decir, en general, que toda crítica que explote visibles erratas de imprenta u otras para agraviar, es poco estimable y habla muy mal en favor de quien la esgrime. Y ya que se trata de un caso relativo al Dr. Biggeri, me viene a la memoria otra crítica, también sin firma, de la *Revista de la U. M. A.*, aparecida en el n.º 6 del Vol. II, la que, refiriéndose al trabajo de aquél *Sobre las abscisas de convergencia de las integrales de Laplace y de las series de Dirichlet*, publicado en estos *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, t. CXXVIII, págs. 65-70, explota una demasiado visible errata de imprenta en el enunciado del teorema I, a saber, unos 0 que figuran en los extremos inferiores de las integrales, y que deben ser 1. Sin embargo, cualquier lector que conozca las primeras nociones de la teoría de las integrales impropias y que haya entendido la rigurosa demostración que, del teorema, dió el Dr. Biggeri (sobre todo si ese lector pretende tener autoridad suficiente para hacer crítica en tono de *magister dixit*), ese lector, digo, debió darse cuenta que, en el enunciado del teorema en cuestión, tal cual apareció en estos *Anales*, sólo existe simplemente la referida errata de imprenta. Hay algo más; el Dr. Biggeri agregó en el mismo trabajo que el referido teorema y su correlativo para las series de Dirichlet son simples corolarios del teorema de Abel, observación que la crítica ha repetido como si fuera propia de ella: no es evidentemente tolerable que las críticas se apropien de las conclusiones obtenidas por los criticados; sobre esta cuestión habría mucho que decir, y muchos otros ejemplos que sacar a colación, pero lo dejaremos para otra oportunidad.

Por el momento, a aquéllos a quienes interese conocer la verdad científica sobre este asunto recomendamos leer detenidamente el artículo del Dr. Biggeri publicado en *Boletín Matemático*, n.º. de abril 15 de 1940, págs. 34-41, titulado: *Sobre las abscisas de convergencia de las integrales de Laplace*.

2°) Precisamente la ventaja de tal demostración de Biggeri sobre las otras conocidas, es que, mediante los desarrollos en serie que él utiliza, ella tiene carácter constructivo, es decir: la inversión de una cierta serie permite resolver efectivamente la ecuación $g(z) - \alpha = 0$; y, por otra parte, Biggeri desarrolló el detalle de la demostración para el caso nada trivial de polo simple porque éste era el único interesante desde el punto de vista de la afirmación del candidato, puesto que, si $g(z)$ es uniforme y $g'(z)$ es regular en el infinito, el caso general de polo múltiple no se puede jamás presentar, cosa que de inmediato ve cualquier persona que conozca la muy elemental propiedad siguiente: si el punto del infinito es un polo de orden m para una función, $g(z)$, dicho punto es un polo de orden $m - 1$, para su derivada, $g'(z)$.

3°) La referida demostración constructiva de Biggeri se extiende de inmediato al caso general de polo múltiple mediante consideraciones que, por lo clásicas y sencillas, huelga exponerlas en detalle.

4°) En el texto del *Boletín* faltan las palabras « el elemento holomorfo en el origen de inversa de » que constituyen una línea del original, la que por un descuido del copista fué saltada en la copia de la primera parte de la carta original, enviada a la imprenta del *Boletín Matemático*, pero todo lector que haya entendido la clara y rigurosa demostración constructiva dada por Biggeri, advierte de inmediato que en el texto del *Boletín* faltan algunas palabras y que se trata en suma de erratas de copia o de imprenta.

5°) La crítica habla de un « único lapsus » que hemos notado, pero nosotros solo hemos hablado de una deficiencia que no hemos calificado de lapsus, y a la que no hemos dedicado ocho páginas impresas como dice la crítica, sino cuatro escasas; y no hemos encontrado una « única » deficiencia sino varias. Y en cuanto a la falla capital, bien sabe la crítica — ya que ella misma lo confiesa — que hemos notado esa falla poniéndola de relieve en forma tal que no pudo pasar inadvertida ni al lector menos atento. La crítica no ha tenido sin embargo empacho, en presentar las cosas como si fuera ella quien la hubiera por primera vez señalado.

IV. — APÉNDICE

Aparte de todo esto, en la primera parte de la carta, Biggeri ha bosquejado, para el teorema publicado en la primera nota de *Boletín*, en la hipótesis general de polo múltiple, una demostración

resumida *con cinco (5) palabras justas* (que para los competentes en Teoría de Funciones son equivalentes a la demostración misma). Dice efectivamente (pág. 259, línea 16): « *aplicando el lema de Rouché* ». Así es en efecto, pues Biggeri, en pág. 259, líneas 15-17, dice textualmente: « Este teorema puede demostrarse también aplicando el lema de Rouché, pero hemos preferido la demostración dada porque ella tiene carácter constructivo ». No se ha detallado tampoco esta virtual demostración del teorema por creerlo también innecesario, ya que cualquier lector que conozca el sentido en que se emplea dicho lema — por ejemplo, en la demostración del teorema fundamental del Álgebra — no encontraría, así lo creíamos, ninguna dificultad ⁽¹⁾ en aplicar este otro método indicado por Biggeri.

(1) A fin de ilustrar a los principiantes y a la crítica, voy, sin embargo, a transcribir a continuación, el detalle de la demostración del teorema de la primera parte de la carta para el caso general de polo múltiple aplicando el lema de Rouché. Esta segunda demostración general es también original de Biggeri, y he aquí su texto:

« Llamemos p al orden de multiplicidad del polo $z_0 = \infty$ para $g(z)$, o sea:

$$g(z) = az^p + a_1z^{p-1} + \dots + a_{p-1}z + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{z^m}; \quad a \neq 0,$$

« y conservemos las demás notaciones de la nota de *Boletín*, de modo que existe un cierto ρ_2 tal que para $|z'| < \rho_2$ será:

$$t = c \cdot z'^p + \eta(z')$$

« donde:

$$c = \frac{1}{a}, \quad y, \quad \eta(z') \equiv z'^p \cdot \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cdot z'^m.$$

« Pongamos:

$$K_1 \equiv \frac{2^p}{(2^p - 1) \cdot |c|} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} |c_m| \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_2 \right)^{m-1}.$$

« Llamemos ρ_5 al menor, en sentido amplio, de los dos números:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho_2, \quad y, \quad \frac{1}{2 \cdot K_1}.$$

« Sea α un complejo arbitrario tal que:

$$|\alpha| > \frac{2^p}{|c| \cdot \rho_5^p}.$$

« La ecuación:

$$g(z) - \alpha = 0$$

« tiene p raíces en el recinto:

$$|z| > \frac{4}{3 \cdot \rho_5}.$$

Pasemos brevemente a otro género de consideraciones.

Como lo hace el Dr. Biggeri notar con toda claridad, (ver nota 1ª, más arriba transcrita), la ventaja de la muy elegante demostración de Bloch ⁽¹⁾, consiste en que éste utiliza fórmulas algebraicas racionales para mantenerse dentro del campo de las funciones

« En efecto, basta observar que, las raíces de la ecuación:

$$cz'^p - \frac{1}{\alpha} = 0,$$

« son interiores al círculo:

$$|z'| < \frac{1}{2} \cdot \rho_5,$$

« y que, sobre la circunferencia:

$$|z'| = \frac{3}{4} \cdot \rho_5,$$

« se verifica:

$$|\alpha \cdot \eta(z')| < |\alpha \cdot c \cdot z'^p - 1|, \text{ igualdad excluida.}$$

« Luego está, así, nuevamente demostrado el teorema en cuestión para el caso general de polo múltiple ».

Nótese que, en las dos demostraciones generales originales de Biggeri, se prueba de paso que: si $f(z)$ es holomorfa en un punto z_0 , los puntos homólogos de un cierto entorno de z_0 llenan un determinado entorno de $f(z_0)$; pues basta fijarse que dicho autor al considerar la función $t = t(z')$, definida del siguiente modo:

$$t = t(z') = \frac{1}{g(z)}; \text{ con: } z = \frac{1}{z'},$$

(pág. 257, última línea, y pág. 258, segunda línea), no hace más que aplicar la propiedad elemental que dice: la función $\frac{1}{f(z)}$ es holomorfa donde la $f(z)$ tiene polo. Recuérdese lo dicho más arriba, a saber, que si Biggeri enunció y demostró el teorema en la forma en que lo hizo, aparte de que en tal forma no se restringe en absoluto la generalidad, fué para que surgiese inmediatamente de él, sin necesidad de hacer ninguna transformación, la afirmación del candidato. Nótese también, finalmente, que la segunda demostración general original de Biggeri es constructiva en cuanto determina valores de r y R , a saber:

$$r = \frac{4}{3 \cdot \rho_5}, \text{ y, } R = \frac{2^p}{|c| \cdot \rho_5^p},$$

pero no lo es en cuanto a la determinación efectiva de las raíces de la ecuación $g(z) - \alpha = 0$. Téngase en cuenta que el ideal en toda demostración de un teorema de existencia, es lograr que la demostración sea constructiva, o por lo menos, que indique teóricamente algún medio de calcular efectivamente aquello cuya existencia se desea probar. (Véase también nuestro trabajo *La Logique Empiriste*).

⁽¹⁾ Véase además págs. 291-292 de la nota de Biggeri publicada en *Boletín*, n° del 15 de diciembre de 1940.

uniformes. Bloch dió dos mayoraciones ⁽¹⁾ para el teorema de Landau, la primera de ellas es de tipo algebraico-logarítmico y la segunda de tipo algebraico-irracional, que solo difiere en un factor constante de la que obtuvo Hurwitz mediante el empleo de la función modular elíptica. De esa segunda mayoración deduce Bloch dos funciones *uniformes* () que le permiten demostrar en pocas líneas el segundo teorema de Picard; pero, para deducir la mencionada segunda mayoración, necesita Bloch casi una página de *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*; por tanto, no son solamente nueve las líneas empleadas por Bloch, como dice la crítica ⁽²⁾, para demostrar el teorema general de Picard. En cambio, la deducción de la primera mayoración en el teorema de Landau, obtenida por Bloch, es mucho más breve que la de la segunda.

La mayoración utilizada por Biggeri para demostrar el segundo teorema de Picard, en su nota de *Boletín* (nº del 15 de diciembre de 1940), no es precisamente la más arriba mencionada primera mayoración de Bloch, como alega la crítica, sino otra diferente, (la mayoración utilizada por Biggeri es mucho más estrecha que la primera de Bloch y esto tiene utilidad para el teorema de Schottky y otras cuestiones afines ⁽⁴⁾).

La simplificación en la deducción del segundo teorema de Picard, a partir del teorema de Landau, expuesta por Biggeri en su nota de *Boletín*, reside en que la demostración de la mayoración utilizada por Biggeri es muy breve comparada con la de la segunda mayoración de Bloch.

⁽¹⁾ Preferimos emplear, en estos casos, el término *mayoración* en lugar de *acotación*.

⁽²⁾ Nótese que tales funciones uniformes de Bloch son *esencialmente distintas* de las dos que utiliza Biggeri en la nota 1ª, a saber, las dos funciones uniformes que figuran en la línea 13 de la nota ⁽¹⁾, pág. 9, del presente artículo. La profunda diferencia que existe entre las dos funciones de Bloch y las dos de Biggeri, reside, precisamente, en esto: si en un entorno del punto $z_0 \equiv \infty$ la función $f(z)$ es uniforme y holomorfa y en todo punto de dicho entorno es $f(z) \neq 0$, y, $f(z) \neq 1$, entonces las dos funciones de Biggeri *están acotadas* en un entorno de $z_0 \equiv \infty$, *cualquiera que sea la naturaleza del punto $z_0 \equiv \infty$ para $f(z)$* (o regular o polo o singular esencial); en cambio: si en un entorno del punto $z_0 \equiv \infty$ la función $f(z)$ es uniforme y holomorfa y en todo punto de dicho entorno es $f(z) \neq 0$, y, $f(z) \neq 1$, entonces las dos funciones de Bloch *no están acotadas* en un entorno de $z_0 \equiv \infty$, *si dicho punto $z_0 \equiv \infty$ es polo de $f(z)$* . Teniendo en cuenta esto que acabamos de decir, véanse detenidamente las líneas 14-21 de la nota ⁽¹⁾, pág. 9.

⁽³⁾ Véase la nota ⁽³⁾ de la pág. 8.

⁽⁴⁾ Además, basándose en esto, Biggeri ha obtenido varios teoremas sobre valores excepcionales de las funciones analíticas, algunos de los cuales son generalizaciones parciales del segundo teorema de Picard.

Por otra parte, es fácil darse cuenta que, contrariamente a lo que dice la crítica, las raíces que aparecen en la mayoración utilizada por Biggeri en su nota de *Boletín* no constituyen ningún escollo, puesto que dichas raíces no originan ningún problema de uniformización en las funciones, $\alpha(z)$ y $\beta(z)$, que Biggeri introduce ⁽¹⁾, ya que en tales funciones no aparece ninguna raíz.

Paso ahora a una cuestión de lenguaje. Biggeri, para aclarar la frase: « $h(z)$ se puede uniformizar en un entorno de $z_0 = \infty$ », ha agregado, inmediatamente a continuación de ella, y entre paréntesis, la siguiente: « $h\left(\frac{1}{z}\right)$ se puede uniformizar en un recinto simplemente conexo que contenga al origen, $z = 0$ ». Esta segunda frase tiene un sentido bien claro para todo lector que vaya al fondo del asunto planteado por Biggeri, y no se detenga en detalles de expresión. La primera frase significa que: $h\left(\frac{1}{z}\right)$ se puede uniformizar a lo largo de toda curva, interior a un círculo de centro en el origen y radio suficientemente pequeño, que rodee al origen $z = 0$, curva que, naturalmente, no pase por dicho origen, puesto que la función $h(z)$, (así como la $f(z)$), no está definida en $z_0 = \infty$. Por otra parte, de la fórmula demostrada por Biggeri que figura en línea 18, pág. 14, perteneciente a la misma nota ⁽²⁾, surge claramente, para quien sabe leer fórmulas algorítmicas, que se trata de uniformizaciones a lo largo de curvas, tales que las distancias de sus puntos al origen son suficientemente pequeñas, curvas que rodean al origen sin contenerlo (tenga en cuenta la crítica que $\log z'$ no está definido para $z' = 0$). Más aún, recuérdese lo dicho por Biggeri, en el mismo orden de ideas, en las líneas 30 - 31, pág. 14, o sea: «en un entorno suficientemente pequeño del origen, $z' = 0$, (excluido el mismo origen)». Pero si la crítica no puede ver más allá de las formas de expresión en lenguaje ordinario, que le suprima, tan sólo, a la segunda frase, la palabra «simplemente», y entonces tendrá aclarado, así lo espero, el sentido de la segunda frase de Biggeri. Y en todo caso la primera frase: « $h(z)$ se puede uniformizar en un entorno de $z_0 = \infty$ », tiene un significado tan preciso que elimina cualquier duda sobre su interpretación. Es intolerable, pues, que salga la crítica haciendo observaciones sobre una nimia cuestión de expresión ⁽²⁾.

(1) Inmediatamente se ve que: si la función $g(z)$ que aparece en el trabajo del candidato es uniforme, también las funciones $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ de Biggeri, son uniformes.

(2) Téngase una vez más en cuenta lo dicho en la nota ⁽¹⁾, pág. 15.

A esta altura del análisis de la crítica, repito una vez más, que todo lector que haya leído y entendido la segunda parte de la carta de Biggeri, se habrá dado cuenta que la nota ⁽⁶⁾ de la misma, tiene por objeto enunciar la solución detallada del problema de uniformización.

La crítica no ha entendido, al parecer, la nota ⁽⁷⁾ de la segunda parte de la carta, en la cual Biggeri demuestra que: « si $z_0 \equiv \infty$ es polo para $f(z)$, entonces, es imposible uniformizar la función $h(z)$ en un entorno de $z_0 \equiv \infty$ ». O sea: si $z_0 \equiv \infty$ es singular para $f(z)$; es condición necesaria para que la función $h(z)$ sea uniformizable en un entorno de $z_0 \equiv \infty$, que la singularidad de $z_0 \equiv \infty$ para $f(z)$ sea esencial. Esta segunda forma de enunciar el teorema demostrado por Biggeri en la nota ⁽⁷⁾, (y en análoga forma se puede enunciar el teorema demostrado por Biggeri al final de su nota del *Boletín*, n° del 15 de diciembre de 1940), explica la llamada a la nota ⁽⁷⁾, que Biggeri hace en la nota ⁽⁶⁾, inmediatamente a continuación de la condición c). La demostración directa que da Biggeri en nota ⁽⁷⁾, de la necesidad de que el punto $z_0 \equiv \infty$ (supuesto singular para $f(z)$) sea singular esencial, para que $h(z)$ sea uniformizable en un entorno de $z_0 \equiv \infty$, es un complemento interesante a su demostración del segundo teorema de Picard y recordemos lo que dice aquél en líneas 19-27, pág. 8:

« La hipótesis restrictiva ⁽⁶⁾, de la cual hablamos más arriba, es la siguiente: $h(z)$ es uniforme en el entorno del punto $z_0 \equiv \infty$. Notemos que esta hipótesis exige, por de pronto, que la singularidad del punto $z_0 \equiv \infty$ para $f(z)$ sea esencial (quedando, por consiguiente, desde ya, excluidas las funciones con singularidades polares en el infinito ⁽⁷⁾). He aquí, entonces, donde interviene el hecho de que la singularidad del punto $z_0 \equiv \infty$, para $f(z)$, no es polar ».

El teorema original del Dr. Biggeri, enunciado en la nota ⁽⁶⁾, líneas 28-35, pág. 13, se demuestra combinando, hábil y laboriosamente, ciertas propiedades de la Teoría de Funciones. Con él se vence la única dificultad que se presenta al aplicar el raciocinio de Bloch al teorema general de Picard. Tiene, además, un interés intrínseco.

La última observación de la crítica relativa a la « integral elíptica usada por Bloch » no merece detenerse. En el fondo, hay en ella más bellaquería de la crítica que otra cosa.

CONCLUSIÓN

De todo lo expuesto en el transcurso del presente artículo resulta probado lo dicho al final de la nota ⁽²⁾, págs. 6-7, es decir que: si en la crítica se suprime lo que ella ha tomado al Dr. Biggeri, a veces con las mismas palabras, lo restante carece de valor científico.

FENÓMENOS DE DESECACIÓN EN EL BOLSÓN DE FIAMBALÁ

POR

GUILLERMO ROHMEDEER

(Universidad Nacional de Tucumán)

I. *Condiciones generales.*— El área de las siguientes observaciones, efectuadas en los meses de enero y febrero de los años 1936 y 1939, se extiende en el Bolsón de Fiambalá entre la población de Anillaco y el curso del Río de la Troya en el sur y la línea Portezuelo de las Flechas - Nacimientos en el norte. Los límites oriental y occidental, los forman « la Costa », como se nombra a la línea de transición entre la sierra y el llano del bolsón.

El terreno estudiado comprende partes de las dos secciones del Bolsón de Fiambalá: la parte austral, más angosta en forma de un ancho valle llano, y una sección de la región superior, de forma ovalada.

El fondo del Bolsón es, macromorfológicamente visto, llano, típicamente de denudación. Su declive total es de 990 ms entre Mesada (2270 m) y Puesto (1280 m), los puntos más extremos al norte y sur respectivamente, distantes entre sí 92 kms en línea recta, lo que da un desnivel de 1,08 %. La región de este estudio tiene una extensión N-S de 35 kms, con un declive absoluto de $1620-1350=270$ ms, o sea un desnivel 0,77 %.

El Bolsón en su forma actual es el producto del aluvionamiento. Los conos de deyecciones en las salidas de las quebradas y los abanicos de aluviones, paulatinamente se han unido entre sí, formando una superficie común. Pero la selección que se ha producido entre el material acarreado, define regiones longitudinales de los detritos más gruesos en la costa hasta el limo fino en la línea más baja.

Las aguas que bajan de las Sierras de Fiambalá y Narváez sufren los efectos del cambio de condiciones de clima y suelo entre las

quebradas y la región de aluvionamiento. La evaporación y la porosidad del subsuelo merman a su caudal; con la pérdida de agua, los arroyos abandonan más material transportado, y la formación de conos y abanicos aumenta consecuentemente al área por donde se distribuye el líquido, y así nuevamente empiezan a obrar los primeros factores.

Así, la hidrografía del Bolson (¹) tiene por característica especial la gran cantidad de arroyos que terminan su curso justamente al pasar la línea de la costa. Su lecho sigue bolsón-adentro, bien perceptible por los cantos rodados de mayor tamaño que aparecen en él, y por una végetación de arbustos algo más densa. Cuando bajan « crecientes », las aguas penetran más en el Bolsón, formando en las partes llanas vastas lagunas. Una vez secadas, estas se transforman en barreales por el limo ahí depositado. En casos aislados, las crecientes llegan hasta el eje fluvial del bolsón.

También el río principal, el Abaucán, es de esta clase. Los arroyos que, del borde de la Puna, en el norte del bolsón, bajan hasta Mesada, Agua Negra, Palo Blanco y Antinaco, se infiltran en los detritos y en los médanos al pie de las serranías. Como los otros arroyos siguen un cambio subterráneo. Vuelven a brotar en Nacimiento, dando origen a las poblaciones de San Antonio, Medanito, Sunchal y Saujil. A 10 kms más abajo de este último oasis, el río, mermado por el agua que le ha sido sustraída para la irrigación, sigue un curso intermitente: en primavera y verano, alimentado por la nieve derretida de las sierras, corre ininterrumpido, aunque bastante débil, hasta Tinogasta, reforzado por las napas subterráneas que le traen el agua de los arroyos serranos; en otoño e invierno, la cantidad de agua no alcanza para formar un río continuo.

De un carácter fundamentalmente distinto son dos ríos que llegan al Bolsón desde el oeste, los ríos Guanchín y de la Troya. El río Guanchín baja de la región de las nieves permanentes de los Nevados y aumenta su caudal con varios arroyos que le llegan superficialmente o por camino subterráneo. En un grandioso valle antecedente, el caudaloso río cruza la sierra y llega al Bolsón, comunicando nuevo impulso al río Abaucán para alcanzar la boca sur

(¹) Bibliografía n° 8.

del Bolsón. La confluencia de los dos ríos ha originado el gran oasis de Fiambalá ⁽²⁾.

El clima de la región en referencia, será con mínimas diferencias el de Tinogasta, de donde existen datos metereológicos ⁽³⁾. Las temperaturas estivales son elevadas, las invernales bastante bajas, como lo indican los siguientes datos:

<i>Temperaturas (en °C):</i>	
Media del año:	18,5
» máxima anual.	28,4
» mínima »	7
Mínima absoluta	— 10
Máxima »	43,0
Media diciembre (mes más caluroso)	26,0
» junio (» » frío).	10,1

La sequedad del aire es extrema. La humedad relativa media anual es de 56 %, la humedad máxima de 64 % (abril), y la humedad mínima es de 48 % (septiembre y octubre), lo que da insignificante diferencia entre verano e invierno.

Las pocas lluvias que caen son estivales. Alcanzan 110 mm en total, llegando al máximo en el mes de enero con 51 mm, a la falta absoluta en el invierno desde mayo hasta septiembre. Un promedio mensual de 9,1 mm expresa esta especial condición climática.

De suma importancia por su efecto secante y morfológico es el viento. Predominan las direcciones del norte y del sur. El viento más sensible es el viento sur que suele correr con mayor frecuencia y fuerza en primavera y verano, llegando a una velocidad de 12 m/seg. En estos días de viento sur, todo el Bolsón está cubierto de una espesa nube de polvo, desde el fondo hasta una altura de 1000 ms.

La vegetación actual es preferentemente xerófila como resultado de los factores anteriores. Está compuesta especialmente de leguminosas de varias familias. Los representantes más frecuentes son:

⁽²⁾ Bibliografía n° 5, 6, 7.

⁽³⁾ Bibliografía n° 3.

Algarrobo negro (*Prosopis nigra*), Algarrobo blanco (*Prosopis alba*), Chañar (*Gourliea decorticans*), Brea (*Caesalpinia praecox*), Piquillín (*Condalia microphylla*), Jarilla (*Larrea divaricata et cuneifolia*), Retama (*Bulnesia retama*), Quillai (*Quilaja saponaria*). En lugares húmedos crecen ejemplares de Cortadera (*Cortaderia argentea*) y Chilca (*Baccharis lanceolata* H. B. K.), y en algunas pequeñas vegas al lado inmediato del río viven varias gramineas (pasto dulce) y hierbas acuáticas. Según las asociaciones de plantas, se presenta el siguiente cuadro de regiones vegetales (distribuidas por zonas principales, lugar y suelo, tipo de vegetación, plantas características):

Zona húmeda del río	Borde del río.		Franja lateral del río.	
	Vegas, pastos.		Bosques ribereños	
	Cortadera.		Chañar (más húmedo)	Algarrobo (menos húmedo)
Zona de médanos y barreales	Suelo permeable, permanentemente seco, excepto los barreales.			
	Estepa de arbustos.			
	jarilla, quillai, restos de algarrobos.	en lechos de crecientes: jarilla, retama, brea, piquillín, cortadera.	barreales sin vegetación.	
Zona de conos de deyección y bocas de quebradas	Suelo seco, suelto, poroso.		Suelo seco, excepto los alrededores de vertientes.	
	Estepa de arbustos.		Bosquecillos de manantiales.	
	jarilla, retama.		algarrobo, chañar, jarilla, chilca, cortadera y gramineas.	

Fiambalá, la población principal (ca. 3000 habitantes), es un oasis, alimentado por un sistema de canales derivados del río Guanchín. Se cultivan preferentemente trigo, maíz, alfalfa, vid e higos. Una finca 10 kms más al sur es Los Morteros. Las otras poblaciones aisladas en las «puntas de agua», es decir en los límites superiores de los conos de deyección, no pertenecen a la región de nuestro estudio.

II. *Observaciones.* (Para la ubicación de los datos: Mapa 1).

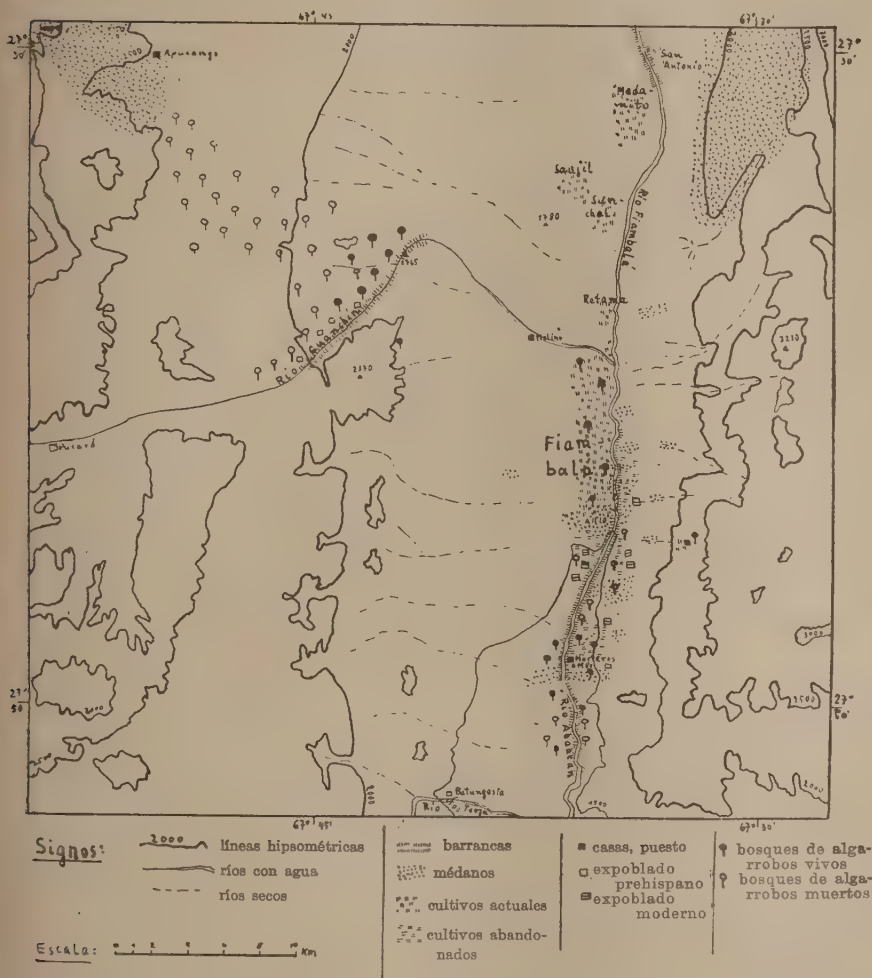
El suelo, eminentemente de aluvión, ostenta dos fenómenos típicos de regiones secas: las dunas y los barreales. Entre las dunas se observan varios estados de formación y evolución:

En el rincón que existe al oeste de las poblaciones de Saujil y Sunchal en la pendiente oriental de la Sierra de Narváez, se encuentra un extenso campo de médanos. Se extiende entre Piedra Parada y el rancho de Apucangó. Las arenas se han acumulado en este rincón por la pérdida de intensidad del viento frente a las escarpadas pendientes de las serranías. Las dunas han sido llevadas hacia arriba en las angostas quebradas que desembocan en el nombrado rincón. Los depósitos de arena intercambian con bancos de acarreo fluvial, provenientes de extensas crecientes. Nuevas crecientes de otros rumbos han cortado «fiumares» en los estratos alternantes; las arenas desapretadas ceden y se desparraman en el lecho más bajo. De ahí son llevadas por una nueva creciente, depositadas en el lugar de su agotamiento, y llevadas otra vez por el viento; o éste las agarra inmediatamente y las deposita en un lugar más alto. Las dunas han sido asentadas espontáneamente por coposos arbustos de retama y jarilla y por gramíneas.

Sus formas de «barquanes» (media luna) indican que han sido formados por los vientos sur, y que tienen tras ellas un trecho bastante largo de camino. Al sudeste de este campo, en el plano del cono de deyección, hay abundancia de troncos muertos de Algarrobos, muchos de ellos de un diámetro de medio metro y más. No presentan indicios de destrucción por manos humanas. Todo el bosque ha sufrido el efecto de la migración de las dunas, que en su avance desde el sudeste han literalmente quemado a los pomposos árboles.

En la falda opuesta del gran valle se extiende el gran arenal de Sunchal y San Antonio. Desde lejos ya se distingue la gran capa de arena que arranca del mismo suelo del bolsón y llega hasta 2500 ms. Su extensión meridional es de 20 kms aproximadamente. Tales arenales son un fenómeno morfológico muy frecuente en el noroeste argentino; estos «glaciares de arena» cubren grandes extensiones de las faldas australes en muchos valles del norte, hasta el borde de la Puna. Son médanos vivos, muy móviles, de superficie muy suelta, extremadamente porosos y todavía sin vegetación. Desde este arenal, las arenas llegan hasta el marco norte del Bolsón, donde en las subidas de nuevo forman medanales.

MAPA 1.— Fenómenos de desecación en el Bolsón de Fiambalá.



Las dunas recientes en el mismo suelo del Bolsón constituyen un tercer conjunto. Su área comprende los dos lados del río, hasta una distancia de él de 3-4 kms en ambos lados. Sus dimensiones son diferentes, hay médanos inmóviles y altos hasta 5 ms, y diminutos y pasajeros de 0,10 m. Todas tienen la forma de barquanes. Los obstáculos que originan su formación deteniendo el lastre del viento llevado inmediatamente sobre el suelo, son de todos tipos: cercos de ramas secas, troncos, arbustos de lampaya, raíces, y las escamas de limo de un barreal. Entre Fiambalá y Morteros, las dunas han invadido al bosque de algarrobos y lo están matando. La mayor parte de los árboles ya se ha secado. Las arenas se han acumulado en claros, abiertos en el bosque por el hombre.

Los médanos alcanzan su mayor extensión en la orilla sur del pueblo. Se han avalanchado sobre pircas y cercos, entierran casas y se internan al pueblo por los anchos callejones. También en ambos flancos circundan a los cultivos y marchan hacia el norte por el lecho del río y por el « campo blanco ».

Aunque el comienzo del movimiento sur-norte de la arena no es de fecha reciente, hay indicios de mayor movilidad del suelo en los últimos decenios. Los cultivos de Fiambalá han sido aumentados en extensión; el suelo, antes cubierto de una capa coherente de empedrado natural de pequeños rodados o de un manto de limo, ha sido quebrado y librado a la ablación eólica. El aumento del tráfico en general tiene los mismos efectos. El río Abaucán ha ahondado considerablemente su lecho en el último centenio, hasta formar un cañón de 25 ms de hondo, lo que produjo un aumento considerable de la erosión en las crecientes laterales. Especialmente al sur de Morteros, en ambos lados del río, el suelo está surcado por escarpados y ramificados fosos que han destapado las raíces de los algarrobos, matándolos así y abriendo una nueva fase de desecación.

Alrededor del pueblo, los árboles han sido cortados, y los troncos semienterrados en las dunas o semi-desenterrados por el viento y las crecientes, atestiguan la anterior extensión del bosque. El testamento de doña Josefa Avila de Romero, fechado en 1816, habla del bosque entre Fiambalá y Morteros. Un plano de la propiedad de la familia de Zalazar del año 1910, ostenta una franja de bosque en ambos lados del río. Hoy, todo esto ha casi desaparecido, o por la acción del hombre, o por la de la arena. Una explotación prudente hubiera evitado la desecación del campo al sur de Fiambalá; o

cortando árboles seleccionados y respetando a los menores, o aprovechando únicamente una parte del ramaje de cada individuo, dándole suficiente vitalidad, para seguir existiendo.

Los algarrobos mejor desarrollados de la región subsisten paradójicamente en el mismo Fiambalá porque ahí prestan inmediata utilidad por su sombra y sus frutos.

En el « campo blanco » del Bolson, se nota igual destrucción de leña. El corte de arbustos es libre, siempre que cada vez no se lleve más que una carga de burro. Pero no hay límite para la repetición de la operación, prescindiendo de la pereza humana. De los arbustos, únicamente subsiste la lampaya, por su ramaje inservible para quemar; ella es precisamente la planta que menos resiste al viento y que mejor se presta para la aglomeración de arena. Innumerables « caminos de leñeros » cruzan el campo, cada vez más extendidos, rompiendo el suelo firme con cada paso de burro.

En la « Puerta de Guanchín » hay un bosque muerto de algarrobos de todas las edades. Se extiende por 10 kms a lo largo del río Guanchín. Todos los árboles ostentan el mismo fenómeno: sus raíces están destapadas, el principio del tronco se encuentra a un metro del suelo. Este, limoso-arenoso, está cubierto por acarreo fluvial y surcado por los lechos de crecientes. La destrucción se explica por un fenómeno inherente a la región: fuertes crecientes han irrumpido en el bosque y llevado la capa alimentadora de las raíces. Ahora, la zona está seca y librada a la erosión y denudación.

Con la reducción de los bosques y la extensión de la estepa, ha variado la fauna. Aumentaron los avestruces, las martinetas y las perdices, antes menos frecuentes en la región de Fiambalá. Esta nueva población animal habla elocuentemente de los cambios generales en dirección hacia mayor sequedad.

Las poblaciones diaguitas en nuestra región han sido más numerosas que las actuales (*). Fiambalá, Los Morteros, Los Baños de Fiambalá persisten como poblados. Pero Batungasta en la boca de La Troya, Puerta del Guanchín (en el mencionado bosque muerto), el pucará de Puerta Guanchín-adentro han sido abandonados y ni siquiera tienen población pasajera de puesteros de ovejas o cabras. El hecho no significa que no sería posible una repoblación y recul-

(*) Bibliografía n° 1, 2, 4.

tivación de estos « expoblados » ⁽⁵⁾. Sin embargo, están a comprender como parte secada de la región, porque no se han recubierto de árboles, sino de rala estepa de arbustos en el mejor de los casos.

Un importante punto de vista en relación con este conjunto de hechos en este: Los habitantes de la región diaguita se alimentaban, aparte del producto de sus cultivos, de los frutos de los árboles y de sus derivados: del algarrobo, chañar, molle, de la tuna; y como tenían otro espíritu económico que sus sucesores, no destruían los bosques naturales, fuentes de su alimentación — hecho que nos da una fecha desde la cual ha empezado la fase de la desecación progresiva.

El oasis de Fiambalá está en el centro de esta evolución. Su área cultivada ha cambiado de extensión y ubicación. W. Penck, en su mapa topográfico del Bolsón de Fiambalá (1:200.000) ⁽⁶⁾ ha indicado las partes cultivadas en los años de su estadía (1912-13). Según él, más o menos una quinta parte del campo labrado de Fiambalá se encontraba en el margen izquierdo (oriental) del río Abaucán, y otros cultivos se extendían en las orillas del río Guanchín hacia el noroeste. Ambas secciones han desaparecido. En la primera, los troncos de tamarindos indican todavía el lugar de una casa desaparecida; en la otra, suaves ondulaciones del terreno atestiguan pircas de adobes derrumbadas.

Pero la desecación va más allá. En tiempos anteriores a los de W. Penck, había extensos terrenos cultivados y habitados más al sur aún. Lo que hoy es la « Plaza de Fiambalá », en el extremo sur de la población, una vez ha sido el centro. Casas abandonadas, paredes derrumbadas, terrenos emparejados y cercados por restos de pircas, y algarrobos aislados indican una extensión que iba más al sur. Iguales eriales y expoblados se encuentran en el otro lado del río. Hasta 5 kms al sur de la orilla del pueblo se hallan otras cinco casas abandonadas, terrenos antes cercados, todo desde hace 60 años invadido por la estepa de arbustos y los médanos (Mapa 2).

⁽⁵⁾ « Expoblado »: punto que ha sido poblado y luego abandonado por alguna causa (destrucción por fuerzas humanas o naturales, falta de medios de subsistencia), y cuyos vestigios persisten en alguna forma o cuyo lugar puede ser identificado todavía; forma análoga a « despoblado »: sin población; « superpoblado »: con demasiada población (en idioma alemán: Hüstung).

⁽⁶⁾ Bibliografía n° 9.

Todo indica que el pueblo con sus cultivos está retirándose hacia el norte, empujado por las dunas y por todas las otras fuerzas que producen la desecación del suelo. W. Anz en su relevamiento de

MAPA 2.— Cambios en la extensión del área cultivada del pueblo de Fiambalá.



ESCALA KILOMÉTRICA



La extensión del área cultivada:

————— 1914, según W. Penck,

----- 1919, según W. Anz,

..... 1939, según observaciones propias.

1918 (*) da una extensión más reducida a los cultivos de Fiambalá, y las observaciones recientes confirman su traslado hacia el norte.

El río no es inactivo en esta transformación. Crecientes fuertes del río Guanchín han quebrado los diques de los canales y arrasado

(*) Bibliografía n° 10.

parte de los cultivos a lo largo de este río. En los últimos 100 años, el río Abaucán ha profundizado considerablemente su cauce, o paulatinamente o como consecuencia de extraordinarias crecientes. Las casas y los cultivos en la orilla izquierda recibían su agua del río Guanchín, a través del lecho del río Abaucán. Las acequias recogían, además de su propio caudal, las aguas de éste y conducidas por las entonces bajas barrancas izquierdas, llegaron al otro lado del lecho y a su destino. Actualmente, esto es imposible, ya que la barranca en el pueblo alcanza a 8 ms de alto.

Un caso especial de desecación es el de la finca de Los Morteros. Hasta hace 35 años, allí había vegas y hasta esteros, y agua en abundancia. Las grandes y numerosas casas subsistentes hacen ver que antaño era una de las fincas más ricas de la región. Después de una gran creciente, el río Abaucán ahondó su lecho, llevándose parte de las vegas y formando barrancas abruptas. El equilibrio entre las napas de agua subterránea y el cauce del río quedó turbado, y con esto empezaron a secarse las vegas, bajó el nivel de los pozos (hoy a 26 ms) y muere lentamente el bosque. Hoy, apenas hay algún cultivo en los campos retransformados en estepa de lampaya e invadidos por los médanos. El acontecimiento, tras varias repeticiones, trajo consigo el aumento de la erosión en los pequeños afluentes ocasionales del río, más abajo de Los Morteros, con la consiguiente desecación del bosque original.

III. *Conclusiones.* — Los fenómenos enumerados ratifican la impresión de una desecación progresiva en el Bolsón de Fiambalá. Hechos parecidos se han observado en varias zonas del país. Sus causas son complejas. Es exagerado, atribuir los fenómenos a un solo factor. Seguramente, en una región afectada prepondera una de las causas, en otra zona otra. Suele atribuirse a menudo la desecación a un supuesto cambio del clima, y seguramente, con él puede explicarse mucho y ante todo disculparse al hombre y eximirlo de esfuerzos para remediar el mal. Como en todas las explicaciones por una sola causa, se deja al lado que el clima, por lo menos el microclima, es una resultante de varios factores que entre sí están en relación recíproca. El único hecho que a lo largo escaparía a la influencia reguladora del hombre, sería un movimiento tectónico que afectara al Bolsón en sentido ascendente. No es imposible, que las frescas barrancas verticales que acompañan al río Abaucán en

trechos siempre más largos, y el curso derecho de su cauce indiquen un ajustamiento del río a un ligero cambio de la base de erosión.

Lo que va a cuenta de la actividad explotadora del hombre, será remediable parcialmente. Las dunas que transgreden los cultivos del pueblo, pueden ser fijadas, el corte de leña puede ser prudentemente reglamentado; no es imposible una replantación forestal con especies de pronto arraigo, y no está excluido el aumento del área cultivada por medio de un mejor aprovechamiento de las aguas disponibles. Hasta qué grado serán utilizables para tales fines las aguas de fondo, sin perturbar el sistema de corrientes subterráneas existentes, y sin causar nuevos disturbios en el régimen hidrográfico-vegetal, esto será otro problema.

BIBLIOGRAFÍA

A. ESCRITOS:

1. S. A. LAFONE-QUEVEDO. — *El pueblo de Batungasta; Anales del Museo de La Plata*, Sección Arqueología, II, La Plata, 1892.
2. E. BOMAN. — *Antiquités de la region andine de la République Argentine et du désert d'Atacama*. París, 1908.
3. G. DAVIS. — *El clima de la República Argentina*. Buenos Aires, 1909.
4. C. BRUCH. — *Exploraciones arqueológicas en las provincias de Tucumán y Catamarca; Revista del Museo de La Plata*, tomo XIX, Buenos Aires, 1913.
5. W. PENCK. — *La estructura geológica del Valle de Fiambalá y de las cordilleras limítrofes al norte de Tinogasta; Boletín del Ministerio de Agricultura*, XVII, pgs. 270-277, Buenos Aires, 1914.
6. W. PENCK. — *Topographische Aufnahmen am Südrand der Puna de Atacama; Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde*, Berlín, 1918.
7. W. PENCK. — *Der Südrand der Puna de Atacama*. Leipzig, 1920.
8. F. A. DAUS. — *Notas sobre la hidrografía de la región endoreica del noroeste argentino y la evolución de las redes fluviales; Anales de la Sociedad Argentina de Estudios Geográficos*, tomo VI, Buenos Aires, 1938.

B. MAPAS:

9. *Der Bolsón von Fiambalá und seine Gebirgsumrahmung* (por W. PENCK), en n° 6 (1:200.000).
10. *Mapa geológico-general de la República Argentina, Topografía*, hoja 13 c Fiambalá (por W. PENCK y W. ANZ), Minist. de Agricultura, Direcc. Gen. de Minas; Buenos Aires, 1929 (1:200.000).
11. *Mapa de la República Argentina*, 1:500.000, hoja 23, Fiambalá, Minist. de Guerra, Instituto Geográfico Militar; Buenos Aires, 1932.

Nota: Los mapas n° 9 y 10 sirvieron de base para los dos mapas que acompañan el presente estudio.

UNA SOLUCION DE AJUSTAMIENTO

POR MINIMOS CUADRADOS SEGUN LOS POLINOMIOS DE GAUSS, MEDIANTE
LA DETERMINACION Y TABULACION DE LOS COEFICIENTES PARAMETRICOS
DE FUNCIONES PARABOLICAS DE 1º A 5º GRADO, PARA SERIES HASTA DE
100 BASES

POR

ELENA BERJMAN

Doctora en Ciencias Económicas

CAPÍTULO I

1. *Las observaciones estadísticas, las series y su aplicación.* — 2. *La tendencia del fenómeno.* — 3. *El problema del ajustamiento.* — 4. *El método de los cuadrados mínimos.* — 5. *Significación de los parámetros.* — 6. *Generalización del sistema de ecuaciones de Gauss.* — 7. *Caso general del centraje.* — 8. *Determinación de los parámetros para el caso de la función rectilínea.* — 9. *Ibídem para la función parabólica de segundo grado.* — 10. *Ibídem para la función parabólica de tercer grado.* — 11. *Ibídem para la función parabólica de cuarto grado.* — 12. *Inconvenientes prácticos.*

1. — Los acontecimientos que eventualmente se producen en el mundo físico, en el orgánico, como en el social, o en la relación entre ellos, pueden ser escrutados y analizados en la medida en que el conocimiento humano le es accesible. La enumeración minuciosa de estas observaciones llevan a través de sus distintas agrupaciones a determinar las leyes que las rigen, mediante formulaciones matemáticas.

El instrumento que puede medir la relación del fenómeno en un instante determinado: la estática, y permite seguir y comparar los movimientos de los hechos ordenados en series, parte dinámica, constituye lo que caracteriza el método estadístico ⁽¹⁾.

(1) MARCH, L., *Les principes de la méthode statistique*, París, 1930, pág. 23.

En general, la investigación estadística lleva a resultados más o menos precisos, que en el campo de las ciencias sociales, por su misma conformación, modificable de acuerdo a los antecedentes de los fenómenos al adquirir la forma expresiva de tendencia, da origen al problema de la relación entre el fenómeno y sus circunstancias causales, mientras en el campo físico, con el aumento del número de observaciones, que por su misma naturaleza, disminuye los desvíos dependientes de causas accidentales, conduce a resultados cada vez más constantes.

De ahí que, la estadística sólo puede realizarse en caso de fenómenos colectivos, ya sea desde el punto de vista que exige una masa de fenómenos que cumplan la condición de un caso particular, o de las condiciones de un fenómeno que sólo existe en forma colectiva y que indiscutiblemente, exige un número grande de observaciones, cualquiera sea el caso que se presente.

Pero, cualquiera sea el campo de investigación, importa principalmente saber que de acuerdo a su valor cualitativo, los hechos han de formar grupos enumerados, que se analizarán cuantitativamente. Cuando las distribuciones de frecuencias, dependen de atributos que entre sí no tienen ninguna ligazón de continuidad en razón del tiempo, adquieren distintas denominaciones, como ser: distribuciones múltiples, correlativas, geográficas, etc. En cambio, si las agrupaciones aparecen dependiendo exclusivamente de un atributo: tiempo, sea éste, años, meses, días, horas, minutos o segundos, formando series, denominánse sucesiones o sucesiones cronológicas en las que su valor aumenta proporcionalmente a su extensión, ya que su experiencia venida desde lejos, en forma sucesiva, puede hacer pensar y medir con mayor firmeza la realidad del momento presente, sin olvidar el gran valor histórico y especulativo, en cuanto se relacionan con distintas sucesiones que en una forma u otra tienen alguna conexión o dependencia.

Cualquiera sea el destino que se asigne a estas sucesiones, su análisis cuantitativo, implica estudiar de primer intento la modulación y el ritmo en el movimiento o sea su dinámica, sólo posible mediante un afinamiento de la trayectoria, cuya fidelidad y justeza depende principalmente de la línea elegida, valorada por su aproximación a la línea experimental.

De todas las aplicaciones, o usos, de este instrumento de investigación, hasta el momento, es el del campo económico el que más provecho obtiene. En efecto, la vieja economía política, se ve renovada a través de las concepciones estadístico-matemáticas, ya que hoy con el avance de los métodos de investigación resulta imposible

prescindir, ni de los fundamentos de la economía abstracta, ni de los instrumentos que compulsa la economía práctica y concreta, y, que aunando los esfuerzos comunes, llegan a través de la econometría a proponer leyes y a formular soluciones. De ahí, que la econometría, estudiando las sucesiones que reciben el nombre de series económicas, puede dar la medida de relación de los fenómenos, que la economía se encargará de teorizar.

Los enormes progresos realizados en los últimos cuarenta años por la estadística económica, como recolectora de datos y como método de elaboración ha permitido, a la ciencia económica, al igual que otras como la biológica, etc., abandonar la era de las elucubraciones abstractas, cambio fundamental en el estudio conceptual de la economía, surgidas desde las obras de Jevons y Pareto.

Nuestro problema y el de nuestra tarea, no es en realidad aclarar la posición u oposición planteada entre los economistas teóricos, defensores de los métodos deductivos, y los econometristas partidarios del método estadístico inductivo, sino al contrario, nuestro problema es inverso, el de ofrecer un pequeño adelanto técnico, para la solución de numerosos problemas, muchas veces desechados, ya sea por la imposibilidad práctica de resolverlos, o, por falta de conocimientos en algunos métodos más difíciles de utilizar, y que obligan a que esos fenómenos se vean hoy estudiados con el mismo método que en el siglo pasado.

Sin olvidar tampoco a los cálculos meteorológicos, a los topográficos, y de ingeniería en general, hay otras ramas científicas, que pueden sacar bastante provecho de los métodos estadísticos — por ejemplo el de nuestros cálculos — como ser el de la ciencia médica, que en el análisis del estado sanitario de la población a través del tiempo podrá corroborar la medida de la eficacia de la prevención sanitaria o el triunfo sobre la muerte ocasionada por las grandes epidemias, y la evolución de las mismas en relación a sus causales, el caso de la difteria, etc. ⁽¹⁾.

Es que la estadística en todo este juego, tiene un rol preponderante, pues de su progreso y exactitud depende el resultado a que se ha de arribar; pero así, como su uso es un factor indiscutible en toda investigación, su aplicación exige agudeza científica, seguridad y cautela, pues puede conducir en casos extremos a nefastas conclusiones.

2. — Todas las series, en especial las económicas, nótase en cuanto se las representa gráficamente, tienen una forma irregular. Su

(1) PIÑERO GARCÍA, P., *La endomografía de la difteria*, Buenos Aires, 1939.

desarrollo que puede ser creciente, estacionario o decreciente, lo es a través de las distintas componentes que influyen en la forma que parece irregular, en su paso de un atributo a otro, en nuestro caso: tiempo. Pero, si estudiamos su conjunto, vemos, que existe una línea media, denominada « normal » que, resumiendo los valores está equidistante de ellos, es decir, que la suma de los cuadrados de sus desvíos en relación a esa línea, cuando ésta se considera como un polinomio de grado dado, es un mínimo. Explicase su forma irregular, por tratarse de una sucesión de hechos que si bien siguen una ley, son producidos eventualmente, con cierta influencia del azar.

Determinada esta línea, que es la denominada secular, lógicamente débense estudiar, los movimientos ondulatorios que se producen sobre ella. Existen así, diversos grupos de movimientos, aparecidos en el análisis progresivo de las influencias en la producción del suceso; a ellas corresponden, el movimiento estacional, el hebdomadario, el ciclo diario, y podríamos llegar así hasta el ciclo horario. Cada uno de estos ciclos forman un movimiento ondulatorio, regular y periódico, sobre la línea del ciclo que le precede, o que es mayor en amplitud, hasta llegar al ciclo que determina la línea tendencial, llamada también línea secular, que teóricamente correspondería a los períodos históricos, pero, prácticamente se reducen al mayor número de años que los datos estadísticos pueden abarcar, y, dentro de ellos en lo que a las investigaciones técnicas se refiere, a intervalos de tiempo en las que pueden reputarse homogéneas las formas dominantes de la estructura económica.

La traslación que determina la tendencia del fenómeno a través de un número grande de años, se debe estudiar dentro de cada período histórico, que puede o no oscilar alrededor del siglo, pero pensamos que de cualquier manera, los medios que constituyen la obtención del material, medios de orden personal, y, medios de orden técnico, son factores primordiales para la exactitud de las investigaciones, y, llegar a completar un siglo de datos, al menos en los países hispano-americanos, sólo es posible mediante un gran esfuerzo.

Claro está, que muchos investigadores, dependiendo del interés del estudio, intensifican más el análisis sobre series cortas, mientras otros, pensando posiblemente en una visión más amplia, exigen las series de ondas largas. La onda larga analizará la dinámica, la onda corta el espectro del fenómeno, dentro de una determinada modulación conyuntural.

3. — No basta construir y ordenar una serie, es necesario elaborar sus datos a fin de formular la ley que rige su ritmo. Es obvio, efectuar previamente una representación geométrica adecuada, y se obtendrá una poligonal experimental. Esta poligonal, que tiene una forma zigzagueante, exige una reducción empírica que al representar el movimiento del fenómeno, elimine los valores extremos compensando sus irregularidades, tarea que da origen al problema denominado del ajustamiento.

Cuando sólo interesa la representación gráfica, con la eliminación primera de las irregularidades de la curva experimental, se recurre a los métodos gráficos o mecánicos, pero, si interesa conocer la expresión matemática del desarrollo, y la curva teórica que la represente, con el fin de permitir un estudio más intenso de su dinámica, forzoso es recurrir a los métodos analíticos, que en un orden general sería el clásico método de los cuadrados mínimos, ya que otros métodos estarían destinados a problemas de carácter especial, como ser la logística para el crecimiento de la población, etc.

Pero, siempre se presentará el problema de determinar primero la línea tendencial. La elección de esta línea, que en cierto modo es arbitraria, lleva a conclusiones diferentes según la función elegida. En efecto, estas líneas varían entre una recta y la función parabólica de distintos grados, que llega a veces hasta el quinto.

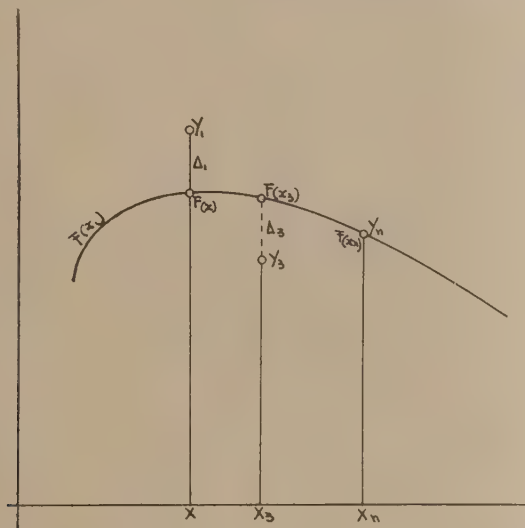
Los desvíos respecto a una línea difieren fundamentalmente con respecto a otra, y las diferentes sucesiones de valores negativos o positivos de los desvíos respecto a una función, sólo indicaría en un estudio conyuntural, la exigencia de una mayor o menor precisión parabólica, en otros términos, indicaría si satisface o no la función elegida o si es necesario determinar otra de distinto grado.

Existen diversos modos o formas, más que precedimientos para la elección de la línea, formas que dependen unas veces del interés subjetivo del investigador, otras de los resultados a que se deseen arribar, y muchas veces, obligados por la técnica operatoria, no se pasa de los límites de las funciones de grado bajo.

4. — El método de ajustamiento, tiene por fin reducir las variaciones de la poligonal experimental a una curva empírica representativa. En efecto, si sobre un sistema de coordenadas cartesianas, se representa una sucesión (x_i, y_i) con $i = 1, 2, 3, \dots, n$ de puntos experimentales, y si se traza una curva $f(x_i)$ que estará determinada por una serie de cuplas $x_i, f(x_i)$ tales que determinen los puntos de su trazado, que puede o no coincidir con los puntos determinados por las cuplas (x_i, y_i) de la curva experimental, se

adoptará para determinar $f(x_i)$, el principio de que la suma de los cuadrados de las diferencias entre los puntos de ambos sistemas sea un mínimo.

Claro está, que se puede calcular un punto cualquiera de la curva en función de los valores de las variables, en este caso la ordenada, y que puede coincidir con el punto determinado experimentalmente, o puede estar muy próximo a él. Se sabe que el azar unas veces, fenómenos extraños otras veces, pueden determinar un aumento o



una disminución en la ordenada del fenómeno, y que también por un mismo punto pueden pasar innumerable cantidad de curvas, que cumplen a su vez las mismas condiciones, dependiendo de la elección de la curva el resultado final. Una de ellas, la curva elegida, determinará el punto que teniendo las mismas abscisas podrá tener diferentes ordenadas.

De ahí que:

$$\Delta_1 = y_1 - f(x_1)$$

obteniéndose en esta forma, las distintas diferencias Δ , para cada uno de los puntos calculados. Se impone la condición que fundamenta este método, de cumplirse

$$(\Delta_1^2) + (\Delta_2^2) + (\Delta_3^2) + \dots + (\Delta_n^2) = \sum_{i=1}^n (\Delta_i)^2 = \text{mínimo.}$$

5. — Elegida la curva de ajustamiento, tendrá ésta la expresión

$$f(x) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \dots + a_k x_i^k$$

su grado será determinado por la respectiva potencia mayor de x , y su forma variará respecto a sus términos componentes. Así, la recta estará representada por una función de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x_i$$

ya que sólo bastan dos puntos para determinarla. Las otras funciones parabólicas, de segundo, tercer, cuarto, quinto o k grado, exigirá la determinación de $(k+1)$ parámetros.

En todos los casos, cada parámetro tiene su significación característica, así el a_0 será igual al espacio inicial, que en el cálculo de la función equivaldría al punto de partida o sea la media aritmética de las frecuencias en el caso de la función rectilínea; a_1 , representa la velocidad inicial, que en nuestro caso significará un aumento o una disminución en la línea tendencial de acuerdo a su valor positivo o negativo, y, a_2 , simboliza la aceleración, que será más rápida cuanto mayor es su valor ⁽¹⁾. Los otros parámetros serán cada vez menores, pues son factores de altas potencias de la variable independiente. Todos estos valores tienen especial significación en el trazado de la curva, y de ellos depende la interpretación teórica del problema.

6. — Elegida la función parabólica de ajustamiento, el problema consiste en determinar los $(k+1)$ parámetros de la misma, para que se verifique la condición

$$\eta(a_0; a_1; a_2 \dots a_k) = \sum_{i=1}^n (\Delta_1)^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2 = \text{mínimo}$$

para ello deben resultar nula las derivadas parciales de la función respecto a cada una de las k variable, y, los parámetros, por lo tanto se obtienen mediante el sistema que se forma partiendo de la condición precedentemente fijada.

(¹) DIEULEFAIT, C. E. y BLASCO, J., *Elementos de Estadística Metodológica*, Rosario, 1939, fasc. 2, págs. 238 y siguientes.

ses ⁽²⁾. Ahora bien; si se desea pasar de una función a otra de grado inmediato superior, bastará con aumentar un solo término, en este caso bastaría agregar $a_4 T_4(x_i)$ cuyo cálculo es rápido.

Surge ahora el problema de la ordenación de las bases para redactar los polinomios de Tchebychew por diferencias de dos polinomios de Gauss, o sea

$$\begin{aligned} \Sigma G_k(x_i) x^s &= \Sigma y_i x^s & 0 \leq s \leq k \\ \Sigma G_{k+1}(x_i) x^s &= \Sigma y_i x^s \\ \hline \Sigma [G_{k+1}(x_i) - G_k(x_i)] x^s &= 0 \end{aligned}$$

Pero, antes de realizar esta tarea, que proyectamos, quisimos estudiar una reducción del sistema de ecuaciones normales de Gauss sobre la base de los sistemas centrados. He aquí nuestro problema. La simplificación (caso *a*), no elimina completamente el problema operatorio, originase, por lo tanto, la posibilidad de tabular los coeficientes paramétricos, trabajo que hemos realizado y que comprende el principal objeto de este estudio.

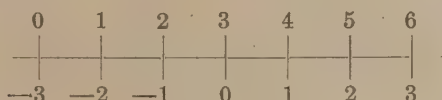
Analicemos entonces, los sistemas generales de ecuaciones reducidas, sobre la que se fundamentará nuestra tarea.

7. — En el caso general de simplificación, nacida del cambio de escala, se tendrá que, si los atributos equiespaciados formarían la escala de los números naturales, o sea:



y en cambio se elige un punto central, que cuando n es impar, coincidirá con un valor entero que será igual a $\frac{n+1}{2}$ y si n fuera par, resultaría un valor fraccionario.

Así: para $n=7$

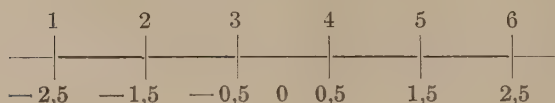


el centro o estaría en $\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$ o sea el cuarto atributo.

(2) DIEULEFAIT, C. E., *La determinación de la tendencia secular en las series económicas*, Rosario, 1932.

Si $n = 6$

$$\frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3,5$$



o sea el punto medio entre el tercer y el cuarto atributo.

Pero, como para el cálculo operatorio, resulta más fácil trabajar con números enteros, estos valores decimales se multiplican por dos, y se tienen en las variables de cálculo una amplitud dos veces mayor fácilmente subsanable, al tener en cuenta esa duplicación para el cálculo final de la función.

El centraje, por lo tanto implica una simplificación, en el sistema de polinomios de Gauss, ya que las sumatorias de las potencias impares se anulan, siempre bien entendido, que exista equiespaciamento.

8.—De acuerdo al centraje, se tendría en el sistema de ecuaciones normales para la forma rectilínea

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & \\ n a_0 + a_1 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{x_i} & = & \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{y_i} \\ \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \\ a_0 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{x_i} + a_1 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{x_i^2} & = & \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{y_i x_i} \end{array} \right.$$

la simplificación, que la reduce a:

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & & \\ n a_0 = & \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{y_i} & \\ \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & \\ a_1 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{x_i^3} & = & \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{y_i x_i} \end{array} \right.$$

de donde se obtendría inmediatamente el valor de los parámetros:

$$a_0 = \frac{\sum y_i}{n}$$

$$a_1 = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2}$$

9.—La función parabólica de segundo grado

$$F_2(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2$$

exige el sistema

$$\left[\begin{array}{l} n a_0 + a_1 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} x_i + a_2 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} x_i^2 = \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} y_i \\ a_0 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} x_i + a_1 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} x_i^2 + a_2 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} x_i^3 = \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} y_i x_i \\ a_0 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} x_i^2 + a_1 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} x_i^3 + a_2 \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} x_i^4 = \sum_{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} y_i x_i^2 \end{array} \right.$$

que por la simplificación impuesta por el centraje se reduciría a

$$n a_0 + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i \quad (1)$$

$$a_1 \sum x_i^2 = \sum y_i x_i$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^4 = \sum y_i x_i^2$$

Por cualquier método algebraico se podrían obtener los paráme-

(1) En adelante escribiremos $\sum$ sin los límites, sobreentendiéndose que varían entre $-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ y $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$.

tros, pero, se prefieren tanto en éste, como en los sucesivos el de los determinantes; y se tendrán los siguientes valores:

$$a_0 = \frac{\sum y \cdot \sum x^4 - \sum y x^2 \sum x^2}{n \sum x^4 - (\sum x^2)^2}$$

$$a_1 = \frac{\sum y x}{\sum x^2}$$

$$a_2 = \frac{n \sum y x^2 - \sum x^2 \sum y}{n \sum x^4 - (\sum x^2)^2}$$

10.—Para la función parabólica de tercer grado

$$F_3(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3$$

el sistema de ecuaciones normales de Gauss, es

$$\left\{ \begin{array}{l} n a_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x_i^2 + a_3 \sum x_i^3 = \sum y \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + a_3 \sum x_i^4 = \sum y x_i \\ a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 + a_3 \sum x_i^5 = \sum y x_i^2 \\ a_0 \sum x_i^3 + a_1 \sum x_i^4 + a_2 \sum x_i^5 + a_3 \sum x_i^6 = \sum y x_i^3 \end{array} \right.$$

que por el centraje, queda reducido a

$$\left\{ \begin{array}{l} n a_0 + a_2 \sum x^2 = \sum y \\ a_1 \sum x^2 + a_3 \sum x^4 = \sum y x \\ a_0 \sum x^2 + a_2 \sum x^4 = \sum y x^3 \\ a_1 \sum x^4 + a_3 \sum x^6 = \sum y x^3 \end{array} \right.$$

Obteniéndose de este sistema, el valor de los siguientes parámetros:

$$a_0 = \frac{\sum y \sum x^4 - \sum y x^2 \sum x^2}{n \sum x^4 - (\sum x^2)^2}$$

$$a_1 = \frac{\sum x^6 \sum y x - \sum y x^3 \sum x^4}{(\sum x^2) \sum x^6 - (\sum x^4)^2}$$

$$a_2 = \frac{n \sum y x^2 - \sum x \sum y}{n \sum x^4 - (\sum x)^2}$$

$$a_3 = \frac{\sum x^2 \sum y x^3 - \sum x^4 \sum y x}{(\sum x) \sum x^6 - (\sum x^4)^2}$$

11.—La función de cuarto grado

$$F_4(x) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + a_4 x_i^4$$

se obtendrá mediante el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} n a_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + a_3 \sum x_i^3 + a_4 \sum x_i^4 = \sum y \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + a_3 \sum x_i^4 + a_4 \sum x_i^5 = \sum y x_i \\ a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 + a_3 \sum x_i^5 + a_4 \sum x_i^6 = \sum y x_i^2 \\ a_0 \sum x_i^3 + a_1 \sum x_i^4 + a_2 \sum x_i^5 + a_3 \sum x_i^6 + a_4 \sum x_i^7 = \sum y x_i^3 \\ a_0 \sum x_i^4 + a_1 \sum x_i^5 + a_2 \sum x_i^6 + a_3 \sum x_i^7 + a_4 \sum x_i^8 = \sum y x_i^4 \end{array} \right.$$

cuyo sistema centrado es

$$\begin{aligned} n a_0 + a_2 \sum x_i^2 + a_4 \sum x_i^4 &= \sum y \\ a_1 \sum x_i^2 + a_3 \sum x_i^4 &= \sum y x_i \\ a_0 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^4 + a_4 \sum x_i^6 &= \sum y x_i^2 \\ a_1 \sum x_i^4 + a_3 \sum x_i^6 &= \sum y x_i^3 \\ a_0 \sum x_i^4 + a_2 \sum x_i^6 + a_4 \sum x_i^8 &= \sum y x_i^4 \end{aligned}$$

de donde se obtienen los parámetros

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(\sum y \sum x_i^4 \sum x_i^8) + (\sum x_i^2 \sum x_i^6 \sum y x_i^4) + (\sum y x_i^2 \sum x_i^6 \sum x_i^4) - \sum y x_i^4 (\sum x_i^4)^2}{(n \sum x_i^4 \sum x_i^8) + 2 (\sum x_i^2 \sum x_i^4 \sum x_i^6) - (\sum x_i^4)^3 - n (\sum x_i^6)^2 - (\sum x_i^2)^2 \sum x_i^8 \\ &\quad - \sum y x_i^2 \sum x_i^8 - (\sum x_i^6)^2 \sum y} \\ a_1 &= \frac{\sum y x_i \sum x_i^6 - \sum y x_i^3 \sum x_i^4}{\sum x_i^2 \sum x_i^6 - (\sum x_i^4)^2} \\ a_2 &= \frac{n \sum y x_i^2 \sum x_i^8 + \sum y \sum x_i^4 \sum x_i^6 + \sum x_i^2 \sum y x_i^4 - (\sum x_i^4)^2 \sum y x_i^2 - \sum y \sum x_i^4 \sum x_i^6 - \sum x_i^2 \sum y \sum x_i^8}{(n \sum x_i^4 \sum x_i^8) + 2 (\sum x_i^2 \sum x_i^4 \sum x_i^6) - (\sum x_i^4)^3 - n (\sum x_i^6)^2 - (\sum x_i^2)^2 \sum x_i^8} \\ a_3 &= \frac{\sum x_i^2 \sum y x_i^3 - \sum x_i^4 \sum y x_i}{\sum x_i^2 \sum x_i^6 - (\sum x_i^4)^2} \\ a_4 &= \frac{n \sum x_i^4 \sum y x_i^4 + \sum x_i^2 \sum x_i^4 \sum y x_i + \sum x_i^2 \sum x_i^6 \sum y - \sum y (\sum x_i^4)^2 - n (\sum x_i^6 \sum y x_i^2) \\ &\quad - (n \sum x_i^4 \sum x_i^8) + 2 (\sum x_i^2 \sum x_i^4 \sum x_i^6) - (\sum x_i^4)^3 - n (\sum x_i^6)^2 - (\sum x_i^2)^2 \sum x_i^8 \\ &\quad - (\sum x_i^2) \sum y x_i^4}{(n \sum x_i^4 \sum x_i^8) + 2 (\sum x_i^2 \sum x_i^4 \sum x_i^6) - (\sum x_i^4)^3 - n (\sum x_i^6)^2 - (\sum x_i^2)^2 \sum x_i^8 - (\sum x_i^2) \sum y x_i^4} \end{aligned}$$

En la misma forma podría obtenerse la función parabólica de quinto grado, cuyo cálculo sería mucho más extenso, pues el sistema se formaría sobre la base de seis ecuaciones con seis incógnitas.

12. — Si se observan detenidamente los distintos factores que intervienen en el cálculo, que serán substituídos por sus respectivos valores numéricos, se nota cuan extensa resulta su operatoria, cuando aumenta el grado de la función, dificultad que se hace mayor en la medida en que aumenta el número de bases; ya que cualquier cantidad elevada a la sexta o décima potencia, estará formada por un número considerable de cifras, número que aumenta al ser multiplicado por otro valor cualquiera elevado a otra potencia, operatoria indispensable para el cálculo.

Cada vez que en Estadística Metodológica se analiza el método de los cuadrados mínimos, a más del inconveniente precitado, se anota otro, y que se refiere a la incapacidad práctica de pasar de una función parabólica a otra de distinto grado, cuando la primera no satisface los propósitos de la investigación, conservando los cálculos primeros.

Ambos puntos han sido solucionados en este trabajo, no solamente en el aspecto que se refiere al pase de una función a otra de grado superior o inferior, sino también que la simplificación de los polinomios de Gauss, mediante la construcción de tablas calculadas, para cada uno de los casos, facilita a los investigadores la tarea a tal extremo de llevar a un mínimo el número de operaciones.

(Continuará)



A MEDIDA QUE PASAN LOS AÑOS



El cemento "SAN MARTIN" es algo más que un cemento portland. Su reconocida alta calidad ha sido probada en millares de importantes construcciones, siendo en todos los casos una garantía para el profesio-

nal y una seguridad para el propietario. "SAN MARTIN" significa cemento portland de calidad insuperable, y su prestigio, como su propio nombre, aumenta y se afianza a medida que pasan los años.

CALIDAD - SERVICIO - COOPERACIÓN



COMPAÑIA ARGENTINA DE CEMENTO PORTLAND
RECONQUISTA 46 - BUENOS AIRES • SARMIENTO 991 - ROSARIO



COMPANIA DE SEGUROS
La Comercial e Industrial de Avellaneda
SOCIEDAD ANONIMA

Incendio

Cristales

Avda. Mitre 429 (piso 1º) - Avellaneda. — Unión Telefónica 22-7941



FIRMES como
la ROCA

PARA TODAS
SUS FUNDACIONES
Y EN CUALQUIER TERRENO

PILOTES FRANKI ARGENTINA

S. de R. Lda.

Administración:

Avda. P.ºe. ROQUE SAEZ PEÑA 783

U. T. 34 - Defensa 4811

BUENOS AIRES



Av. R. SAENZ PEÑA 530 - BUENOS AIRES

*La más poderosa y
difundida en el país.*

Seguros de Vida en vigor:

\$ 314.049.622 m/l.

Reservas Técnicas:

\$ 51.579.226 m/l.

Pagado a Asegurados y Beneficiarios desde 1923:

\$ 99.933.945 m/l.



Emblema de CALIDAD CONSAGRADA

Cuando Vd. vea un producto con este monograma, puede estar seguro de que es lo mejor que produce la industria.

Este emblema identifica a la Compañía que cuenta con 400 hombres de ciencia en sus Laboratorios de Investigaciones.

En la marcha del progreso, la General Electric va a la vanguardia. Y mantiene la iniciativa para producir *científicamente* a menor costo, a fin de que más gente pueda disfrutar de los beneficios derivados de la electricidad.

GENERAL  **ELECTRIC**
SOCIEDAD ANONIMA

Tucumán 117, Bs. Aires. Corrientes 732, Rosario



Instituto Italo Argentino

DE SEGUROS GENERALES (S. A.)

Opera en Todos los Ramos

Teléfonos:

U. T. 34, Defensa 6011 al 6015

BUENOS AIRES

Av. Roque Sáenz Peña 890



Seguros

de

Vida • Incendios

Automóviles • Marítimos

Accidentes Individuales y

Colectivos

Capital suscrito	\$ c/l. 3.000.000.—
Capital Integrado . . . \$ c/l. 1.800.000.—	
Reservas	\$ c/l. 9.538.000.—
Total de Garantías	\$ c/l. 12.538.000.—

Pagos a los Asegurados y Beneficiarios \$ c/l. 29.515.000.—

"La Germano-Argentina"

Compañía de Seguros S.A.

MAIPU 262

Buenos Aires

FABRICA DE CALES - MATERIALES DE CONSTRUCCION

O. GUGLIELMONI

IMPORTADOR

UNICO REPRESENTANTE
EN BUENOS AIRES DE LA

Fábrica Cerámica "ALBERDI" S. A.

Oficinas y Ventas

Avda. DE MAYO 634

BUENOS AIRES

U. T. (34) 2792 y 2793

"LA ROSARIO"

COMPANIA ARGENTINA DE SEGUROS

1888 - 53 años de intachable actuación - 1941

CAPITAL INTEGRADO
Y RESERVAS

11.036.811.66 c/l.

SINIESTROS PAGADOS
DESDE SU
FUNDACION

27.201.372.27 c/l.

SECCIONES:

INCENDIOS

VIDA

AUTOMOVILES

ACCIDENTES

DEL

TRABAJO

CRISTALES

CASA CENTRAL:

Buenos Aires

AV. DE MAYO 715

U. T. 33, (Avenida) 3545

LEOPOLDO SOL & CIA.

Sociedad de Responsabilidad Ltda.

RECONQUISTA 558

INSTRUMENTOS Y ACCESORIOS PARA LABORATORIO

Aparatos para medición y control de temperatura, caudal,
presión humedad, y tiraje.

Indicadores y Registradores de pH., conductividad, CO₂, etc.
para el Laboratorio y la Industria.

Material para Laboratorios de Investigación y Enseñanza.
Drogas para laboratorio.

Maquinaria para Contratistas - Obras Públicas - Industrias -
Minería.

COLUMBIA

SOCIEDAD ANONIMA DE SEGUROS

Secciones habilitadas:

INCENDIO - AUTOMOVILES



ACCIDENTES - MARITIMOS

VIDA - CRISTALES

RIVADAVIA 409

BUENOS AIRES

U. T. 33 - 8261 (Av.)

CASA CERESITA

BUENOS AIRES

AZOPARDO 920

U. T. 33-5303

ROSARIO

E. ZEBALLOS 1087

U. T. 21212

CORDOBA

ENTRE RIOS 446

U. T. 6415



CERESITA LTDA. CHILE

Santiago de Chile

HUERFANOS 751

CERESITA DEL URUGUAY

Montevideo

JAIME CIBILS 2725

ES UN PRODUCTO DE FAMA MUNDIAL

PRODUCTOS

Merck

Potasa cáustica "Merck"

Soda cáustica "Merck"

en forma de lentejas.



ARIENTI & MAISTERRA

EMPRESA CONSTRUCTORA



Caños de hormigón armado
para desagües pluviales.

Caños corrugados de concreto
simple, aprobados por Obras
Sanitarias de la Nación para
obras domiciliarias.

Absoluta Impermeabilidad.



SI SU PROVEEDOR NO LOS TIENE PIDALOS A SUS FABRICANTES

Av. VELEZ SANSFIELD 1851 - U. T. (21) 0075 - BUENOS AIRES

CRISTALERIA

Magnin

y



Bolognini

Envases de Vidrio

Escritorios

Caseros 3121

U. T. 61-0212

Fabrics

Tabaré 1630

U T 61-3800

COMPAÑIAS ARGENTINAS DE SEGUROS

“LA ESTRELLA” S. A. Y “AMERICA”

PARA SUS BIENES ASEGURABLES, LES OFRECEN SUS AMPLIAS GARANTIAS
CIMENTADAS EN SU LARGA TRAYECTORIA DE VIDA ASEGURADORA

Teléfonos:

U. T. 31, 2747 - 2890 - 2727

471 - SAN MARTIN - 475

BUENOS AIRES

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal	Carbonell, José J.	Gascón, Alberto	Mazza, Sigfrido C.
Aguilar, Félix	Cárceva, Enrique de la	Gaspar, Fernando L.	Méndez, Julio
Albizzati, Carlos M.	Carelli, Antonio	Géneau, Carlos E.	Meoli, Gabriel
Alessi, Juan M.	Carelli, Humberto H.	Gerardi, Donato	Meoli, Humberto
Alvarez de Toledo, Bell-sario	Caride Massini, Pedro	Ghigliazza, Sebastián	Mercau, Agustín
Alende Lezama, Luciano P.	Carman, Ernesto	Giagnoni, Bartolomé E.	Meriggi, Juan C.
Anchorena, Juan E.	Carniglia, José	Giannone, José	Mermoz, Francisco A.
André, Enrique de	Casacuberta, Antonio	Giusti, Leopoldo	Micheletti, José A.
ARÓN Suárez, Vicente	Castellanos, Alberto	Gottschalk, Otto	Molfino, José F.
Aparicio, Francisco de	Castello, Manuel F.	Grieben, Arturo	Molina Carranza, L.
Arco, Manuel J.	Castielfras, Julio R.	Gutiérrez, Ricardo J.	Molle, Clotilde C.
Arnaudo, Silvio J.	Ceppl, Héctor	Herbin, Luis A.	Montes, Vicente E.
Avila Méndez, Delfín	Clos, Enrique C.	Hermite, Enrique	Moraguez Bernat, Jaime
Bado, Attilio A.	Cock, Guillermo E.	Herrera Vegas, M.	Moreno, Evaristo V.
Bachmann, Ernesto	Coni Bazán, F. A.	Herzer, Bernardo	Mouchet, Enrique
Baglietto, Eduardo E.	Curti, Orlando P.	Hickethier, Carlos F.	Muratti, Natalio
Balbiani, Attilio	Curatchet, Luis	Hofmann, Herbert	Nágera, Juan José
Balbani, Luis M.	Chanourdie, Enrique	Houssay, Bernardo A.	Natale, Alfredo
Bancalari, Agustín	Chizzini Melo, Anibal F.	Hoyo, Arturo	Natale, Ernesto
Bandoni, Alfredo J.	D'Ascoli, Lucio	Igartúa, Luis María	Negrete, Lucía
Barabino Amadeo, S.	Damianovich, Horacio	Irigoyen, Luis H.	Negri, Mario L.
Bargna, Juan L.	Dassen, Claro C.	Isetta, José	Nielsen, Juan
Barral Souto, José	Dasso, Ricardo L.	Ivanisseyevich, Ludovico	Oglioblin, Alejandro
Barrancos, Leónidas A.	De Cesare, Elías A.	Jorge, José M.	Oliveri, Alfredo E.
Becke, Alejandro von der	De Fina, Armando L.	Jakob, Cristofredo	Ortiz, Aníbal A.
Berrino, Juan B.	Delleplane, Luis J.	Kervor, Juan B.	Ortiz de Rosas, Jorge
Bertino, José Carlos	Dennler, Jorge	King, Diarmid O.	Otamendi, Gustavo
Besio Moreno, Nicolás	Deulofeu, Venancio	Kinkelín Pelletán, Eugenio de	Otonello, Héctor
Blanchi Lischetti, A.	Díaz, Emilio C.	Kinkelín Pelletán, J. C. de	Otonello, Néstor J.
Biggeri, Carlos	Díaz, Emilio L.	Knie, Guillermo	Páez, José María
Blanchard, Everard E.	Dieulefait, Carlos E.	Knoche, Walter	Page, Franklin Nelson
Blaguer, Juan	Doello-Jurado, Martín	Kraglievich, Nicolás T.	Paltóvi, y Oliverras A.
Blasco, José	Dobranich, Jorge W.	Krapf, Eduardo	Paquet, Carlos
Boaglio, Santiago	Dominguez, Juan A.	Labarthe, Julio	Parodi, Edmundo
Bolognini, Héctor	Dubecq, Raúl E.	Lagunas, Simón	Parodi, Lorenzo R.
Bonanni, Cayetano A.	Dueñas, José	La Menza, Francisco	Pastoro, Franco
Bonello, Roberto	Duhau, Luis	Laporte, Luis B.	Paz Anchorena, José M.
Bontempi, Luis	Durieu, Mauricio	Larco, Esteban	Pérez Hernández, A.
Bordas, Alejandro F.	Escudero, Antonio	Lasso, Alfredo F.	Pérez Martínez, Anibal
Bordenave, Pablo E.	Escudero, Pedro	Latzina, Eduardo	Perrone, Cayetano
Borzi, Ana María	Faré, Santo S.	Leguizamón Ponda, Martiniano	Postalardo, Agustín
Bosch, Gonzalo	Fernández, Alberto J.	Lignères, Roberto	Pini, Aldo S.
Bosio, Anecto J.	Fernández Díaz, A.	Lizer y Trelles, C. A.	Pistarelli, Julio A.
Bottaro, Juan C.	Fernández Long, S.	Lombardi, Alberto	Plá, Cortés
Bozzini, Luis (h.)	Fesquet Alberto E. J.	López Sommaschini, Antonio J.	Platz, Hubert
Briano, Juan A.	Figini, Angel	Loyarte, Ramón G.	Posadas, Carlos
Bulich, Raúl	Figuerero, Hernando W.	Lugones, Arturo M.	Quinos, José Luis
Bula, Clotilde A.	Fischer, Gustavo Juan	Llauró, José	Quinterno, Bruno F.
Bunge, Juan C.	Flores, Emilio M.	Magnin, Jorge	Quiroga, Pedro R.
Buontempo, Guillermo	Florit, Carlos J.	Mainini, Carlos	Raimondi, Alejandro
Burkart, Arturo	Fossa Mancini, E.	Mallol, Emilio	Raffo, Bartolomé M.
Busso, Eduardo B.	Franceschi, Alfredo	Mamberto, Benito	Ramaccioni, Danilo
Butty, Enrique	Frenguelli, Joaquín	Manera, Edmundo	Ramallo, Carlos M.
Buzzo, Alfredo	Fürnkorn, Divico A.	Marco del Pont, E.	Ratto, Héctor R.
Callet Bois, Teodoro	Gadda, Carlos Manuel	Marchionatto, Juan B.	Rebuelto, Antonio
Canale, Humberto	Gaffuri, Domingo	Martignone, Eduardo	Rece, William A. Eter
Capelli, Pedro F.	Galmardini, Alfredo G.	Martini, Ardolino	Repetto, Blas Angel
Capurro, Roberto H.	Gando, Alfredo R.	Marotta, F. Pedro	Repossini, José
Carabelli, Juan José	Gondolfi Herrero, Augusto	Marotta, R. Armando	Risotto, Attilio A.
Carboni, Esteban	Gondolfo, José S.		Robles, Angel A.
			Rodríguez Aravena, S.
			Rodríguez, Miguel

Roffo, Angel H.	Sarrabayrouse, Eugenio	Spinetto, David J.	Veyga, Francisco de
Roffo, Juan	Savon, Marcos A.	Spota, Víctor J.	Vidal, Eduardo
Roldán, Raimundo	Schnack, Benno J.	Storni, Segundo R.	Vignati, Milcíades A.
Rokotnitz, Otto	Schulz, Guillermo	Talana, Jorge	Vignaux, Juan G.
Rossell Soler, Pedro	Selva, Domingo	Tarragona, José	Villalobos Domínguez,
Ruata, Luis E.	Selzer, Samuel	Tello, Eugenio	Cándido
Rumi, Tomás J.	Sesma, Angel	Torre Bertucci, Pedro	Vinardell, Alberto
Ruiz Moreno, Isidoro	Sheahan, Juan F.	Torello, Pablo	Volpatti, Eduardo
Ruiz Moreno, Adrián	Silva, Leónidas L.	Tossini, Luis	Walner, Jacobo
Sabarla, Enrique	Simonoff, Miguel	Trelles, Rogello A.	Wunenburger, Gastón
Salomón, Hugo	Simons, Hellmut	Trucco, Sixto E.	Wauters, Carlos
Sampletro, Adolfo D.	Siri, Luis	Valeiras, Antonio	Wernicke, Raúl
Sánchez, José Ricardo	Sobral, Arturo	Valentini, Argentine	White, Guillermo J.
Sánchez, Gregorio L.	Solari, Emilio F.	Valentinuzzi, Máximo	Williams, Adolfo T.
Sánchez Díaz, Abel	Solari, Miguel A.	Vallebella, Colón B.	Yepes, José
Sanromán, Ibero	Somonte, Eduardo	Vanossi, Reinaldo	Zamboni, Agustín
Santángelo, Rodolfo	Sordelli, Alfredo	Varela Gil, José	Zapfi, Enrique V.
Sarhy, Juan F.	Soler, Frank L.	Vela Huergo, Julio	Zulonga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José	García, Eduardo D.	Milei, Emilio Angel	Sadosky, Manuel
Carrera, César J. M.	Gorchs, Agustín C.	Monteverde, José J.	Stacco, Alberto Carlos
Cotlar, Mischa	Greenway, Daniel J.	Recorder, Roberto F.	Tortorelli, Lucas A.
Chiodin, Alfredo S.	Krieger, Gordon C.	Repetto, Cayetano	Viticcioli, Fernando
Devoto, Carlos Alberto	Lacrau, Juan Pedro	Reynal, Jorge E.	Wechsler, Wolf
Ellzondo, Francisco M.	Longo, Rafael E.	Roitman, César	
Ferramola, Raúl	Mailhos, Luis E.	Rusconi, Carlos	

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cia.	De la Puente y Busta-	Lutz, Ferrando y Cia.	Polledo Hnos. y Cia.
Benvenuto y Cia.	mante	Hijos de Atilio Massone	Rezzani y Esperne
Caminos y Construccio-	D'Elia, Antonio	Otto Hess, S. A.	Rivara y Cia.
nes Argentinas - CYCA	Establecimientos Indus-	Peña, Guillermo A.	Siemens-Bauunion
Compañía General de	trialas "Febo"	Jacobo Peuser, S. A.	T. Gr. "Tomás Palumbo"
Construcciones	Italo Argentino Puricelli	Ltda.	Wayss y Freytag
	Latham Urtubey, Agus-		
	tín O.		

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E. | Besio Moreno, Nicolás | Tornquist, E. y Cia. (Lda).

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente delegado, Dr. Juan Olsacher; Secretario, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Agrº Bernardo Pilotto.

SOCIOS ACTIVOS

Brandan, Ramón A.	Deheza, Eduardo	Godoy, Salvador A.	Mirizzi, Pablo Luis
Brogli, Alberto A.	Esteban, Fernando	Hosseus, Carlos Curt	Olaf Lützow, Holm
Carlomagno, José	Fernández, Miguel	Mácola, Berardo A.	Olsacher, Juan
Chaudet, Enrique	Fontana, Lorenzo F.	Mácola, Tulio	Padula, Federico

Pasqualini, Clodoveo
Peláez, J. Gambastiani
de

Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos

Rothlin, Edwin
Vercello, Carlos

Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Meade L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Ing^o Quím. Guillermo Berráz; Vice-presidente, Ing^o Agr. Bruno Santini; Secretario de correspondencia, Ing^o Quím. Oscar S. Mallea; Secretario de actas, Per. Quím. Víctor S. Nicollier; Tesorero, Ing^o Quím. Rafael O. Méndez; Vocales titulares: Prof. Rolando Hereñú e Ing^o Agr. Arturo Ragonese; Vocales suplentes: Ing^o Francisco E. Urondo e Ing^o Quím. José Salgado; Encargado de Publicaciones, Ing^o José Babini; Encargado de Canje, Ing^o Quím. Rodolfo Rouzaut.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Berráz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bossi, Celestino
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Couraut, Pablo
Crouzelles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.

Fester, Gustavo A.
Gollán, Josué (h.)
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Jullá, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Lexow, Siegfried G.
Mal, Carlos
Mallea, Oscar S.
Mántaras, Fernando
Martino, Antonio E.
Méndez, Rafael Q.

Minervini, José
Montpellier, Luis Mar-
cos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nicollier, Víctor S.
Nigro, Angel
Niklson, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.

Puente, Nemesio G. de la
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Attilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Vergara, Emilio A.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Eduardo Carette; Vice-Presidente, Ing^o Cayetano C. Piccione; Secretario, Sr. Adrián Ruiz Leal; Tesorero, Sr. Manuel Tellechea; Bibliotecario, —
Vocales: Dr. Juan B. Lara; Ing^o Juan P. Toso; Ing^o Angel Stura; Sr. Raulfo Rosales; Dr. Juan P. Paganotto; Dr. Mario Bidone.

SOCIOS ACTIVOS

Ayala Castagnino, G.
Bacal, Benjamín
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo

Croce, Francisco M.
Dodds, Leonel
Gomensoro, José N.
Guevara, José R.
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lombardozi, Vicente

Navarro Correas, José A.
Paganotto, Juan P.
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Rosales, Raulfo S.
Ruiz Leal, Adrian

Sáez Medina, Miguel
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Toso, Juan F.

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Alberto E. Sagastume Berra; Secretario, Dr. Roberto A. Crespi Gherzi; Tesorero, Dr. Carlos J. B. Teobaldo; Vocales: Dr. Humberto Giovambattista, Dr. Ernesto R. Sabato, Dr. Tomás Pera, Ing^o Manuel Ucha Udahe.

SOCIOS ACTIVOS

Aisina Fuertes, Fidel
Angil, Jerónimo

Arroyo Basaldda, Víc-
tor M.

Bonet, Luis A.
Brau, Eduardo F.

Coria, Pedro E.
Cortelezzi, Juana

Crespi Gherzi, Rodolfo A.	Lockart, Carlos E.	Nico, Raúl	Sáez, Francisco A.
Christmann, Federico E.	Loedel Palumbo, Enrique	Oliva, Virgilio	Sagastume, Carlos A.
Daló, Héctor R.	Mac Donagh, Emilliano J.	Paternosto, Pedro G.	Sagastume Berra, A. E.
Gascón, Jorge	Madrid, Diógenes	Pera, Tomás Carlos	Scheggia, Eduardo R.
Gershánik, Simón	Magliano, Hilario	Platzcek, Ricardo P.	Teobaldo, Carlos
Glovambattista, Humberto	Márquez, Aníbal R.	Ringuet, Emilio J.	Trejo, César A.
Inda, Carmen	Marmonti, Angel	Romano Yalour, Juan G.	Ucha Udabe, Manuel
Landolfi, José María	Massimino, Blas	Sabato, Ernesto R.	Vucetich, Danilo C.
Lisarán, Fernando	Méndez, José D.	Sabato, Juan	Wilkins, Alejandro

SECCION TUCUMAN

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Inge Arturo M. Guzmán; Secretario, Dr. Luis N. Pizzorno; Tesorero, Dr. Félix Cernuschi; Vocales: Dr. José Würschmidt, Dr. Alejandro Terracini, Dr. O. Rodolfo Fepe, Dr. Dacio Deza Cenget.

SOCIOS ACTIVOS

Altieri, Radamés A.	Fonio, Osvaldo A.	Novillo, Napoleón R.	Schegg, Alfredo
Blaisten, Raúl J.	Frondizi, Risperi	Peirano, Abel A.	Seria Bravo, Custodio
Boggiatto, Dante E.	Greve, Walther	Peña Guzmán, Solano	Sorol, Rafael V.
Cernuschi, Félix	Guzmán, Arturo M.	Pepe, O. Rodolfo	Storni, Julie S.
Cetrángolo, Guillermo	Hernando Balmori, Clemente	Pizzorno, Luis N.	Terracini, Alejandro
Conceição de la Cruz, Alfonso	Herrera, Félix E.	Robín, Maximiliano V.	Treves, Renato
Cuenya, Carlos (h.)	Ibáñez, Adolfo P.	Rodriguez Marquina, Elío	U'elenghi, Alejandro S.
Deza Cenget, Dacio	Jung, Walter	Lohmeyer, Guillermo	Verna, Luis C.
Escalante, Dardo A.	Lázaro, Juan F. de	Salame, Ernesto M.	Virla, Eugenio F.
Freiberg, Salomón	Manoff, Isaac	Sánchez Reulet, Aníbal	Würschmidt, José

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Agullar y Santillán, R.	México	Hijar y Haro, Luis	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero	Janet, Pierre	París
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)	Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Avendaño, Leonidas	Lima	Kelper, Guillermo	Berlín
Bachmann, Carlos J.	Lima	Langevin, Paul	París
Bellivar, Ignacio	Madrid	Levi Peppo	Rosario
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)	Levi Civita, Tullio	Roma
Borel, Emile	París	Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Bragg, William Henry	Londres	Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Bruch, Carlos	Olivos (Bs. As.)	Molina, Enrique	Concep. (Ch.)
Cabrera, Blas	Madrid	Monjaráz, Jesús E.	México
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro	Montel, Paul	París
Carabajal, Melitón M.	Lima	Moretti, Gaetano	Milán
Chester Bradley, J.	Ithaca, N. Y.	Oliver Schneider, Carlos ..	Concep. (Ch.)
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)	Perelra d'Andrade, Lencastr	Nova Goa (I. P.)
Darmois, Georges	París	Perrin, Tomás G.	México
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)	Perrine, Carlos D.	Córdoba
Escomel, Edmundo	Lima	Pl y Suñer, Augusto	Barcelona
Flebrig, Carlos	Munich (Al.)	Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Fontecilla Larraín, Arturo...	Santiago (Ch.)	Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima	Rosenblatt, Alfred	Lima
García Godofredo	Lima	Rowe, Leo S.	Washington
González del Riego, Felipe ..	Lima	Tello, Julio C.	Lima
Goodspeed, Thomas H.	Berkeley, Cal.	Terracini, Alejandro	Tucumán
Greve, Germán	Santiago (Ch.)	Valle, Rafael H.	México
Gulnter, Philibert	Nancy (Fr.)	Vález, Daniel M.	México
Hadarnard, Jacques	París	Villarán, Manuel V.	Lima
Haurman, Luciano	Bruselas	Vitoria, Eduardo	Barcelona
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)		